



Title	有理型函数論ニ於ケル函数 $m(r, a)$ ニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 82, p. 2-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74287
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

364. 有理型函数論 = 於ケル函数 $m(r, a)$ = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

$m(r, a)$ は最初 R. Nevanlinna = ヲツテ

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - a|} d\vartheta$$

ト定義サレタガ Ahlfors ハ

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[f(re^{i\vartheta}), a]} d\vartheta \quad (1)$$

$$\text{但シ } [a, b] = \frac{|a - b|}{\sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}}$$

ト定義シタ方が種々ノ計算 = 便利デアルコトヲ示シタ。

$[a, b]$ は a, b を定義サレテキル Gauss 平面 = 原点 O = 於テ切スル半径 $\frac{1}{2}$ の球面 Σ を考ヘルトキ、コノ Σ 上へ例ノ如ク a, b を大々射影シテ得ラレル点 (コレモ誤解ノオソレガナイトキハ a, b デ表ハス) を結ブ弦ノ長サヲ表ハスカラ $m(r, a)$ ハ Σ 上へ total 1 の mass をアル方法デ分布シタトキ、logarithmic potential と考ヘルコトが出来ル。シカモコノ mass ハ $|z| = r$ 、 $f(z)$ = ヨル寫像 L_r (コレモ Σ 上デ考ヘル) 上ニ分布サレテキル。コノ分布ヲ集合函数 $\mu_r(E)^{1)}$ デ表ハセ

$$m(r, a) = \int_{\Sigma} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu_r(w) = \int_{L_r} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu_r(w) \dots (2)$$

トナル。 $\mu_r(E)$ ハ $f(re^{i\varphi}) \in E$ ナル φ の集合 ($0 \leq \varphi < 2\pi$ = アルモ) を E_φ トスルトキ $\frac{1}{2\pi} m(E_\varphi) =$ 等シイ。

$m(r, a)$ を比ノ如ク考ヘルバ $m(r, a) =$ 関スル $f(z)$ ノ種々ノ性質ノ意味が明瞭ナル。一例トシテ defect を考ヘル。

$f(z)$ を $|z| < R$ ($R \leq \infty$) = ア定義サレタ有理型函数トシ

$$\delta_N(a) = \lim_{r \rightarrow R} \frac{m(r, a)}{T(r)}$$

1) $\mu_r(E)$ ハ Borel の集合ヲ定義サレテキル。

ト置ケバ $\lim_{r \rightarrow R} T(r) = \infty$ ナルトキハ $\delta_N(a) > 0$ ナル点 a ,
 集合 E_N ハ *capacity*²⁾ が 0 デアル。

Frostman ハコレヲ R. Nevanlinna ノ第一定
 理ヲ用ヒテ証明シテキル³⁾ が實ハコノ定理ノ証明ニハ第一定理
 従ツテ $N(r, a)$ ノ性質ハ必要デナイ。シカモ $f(z)$ が有理
 型デアルト云フコトモ少シモ必要デナイ。(2) = ヨツテ與ヘ
 ラレル *potential* トシアノ $m(r, a)$ ノ定義ガケガコノ結
 果ヲ與ヘルノデアル。

更ニ次ノ定理が成立スル。

2) 集合 E ノ *capacity* C_E ハ次ノ如ク定義サレル。

total i, mass ヲ E ノ上ニ分布シテ (コノ分布ヲ集合函数 $\mu = \tau$
 表ハス) *Potential* $U_\mu(a) = \int_E \log \frac{1}{(w, a)} d\mu(w)$, a ノ変化ニ
 對スル上限ヲ $M_\mu(E)$ トシ、此ノ如キアラユル μ = 内スル $M_\mu(E)$
 ノ下限ヲ V_E トスルトキ、 $C_E = e^{-V_E}$ トオク。 $C_E = 0$ ト云フ、ハ
 $V_E = +\infty$ ナルコトデアル。即チ如何ナル $\mu = \tau$ 對シテ $M_\mu(E) = \infty$
 トナル。

3) Frostman: Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion (Årtonde skandinaviska Matematikerkongressen i Stockholm, (1934)

Frostman: Potential d'équilibre et capacité des Ensembles (Thèse, Lund, 1935).

定理 $|z| < R$ = テ定義サレタ任意ノ函数 $f(z) =$ 對シテ
 $m(r, a)$ ヲ (1) = ヨツテ定義スル⁴⁾。然ルトキハ $0 < r < R$
 = テ定義サレタ $\lambda(r) \geq 0$, $\lim_{r \rightarrow R} \lambda(r) = \infty$ ナル任意ノ函

数 $\lambda(r) =$ 對シテ

$$\lim_{r \rightarrow R} (m(r, a) - \lambda(r)) > 0$$

ナル点 a , 集合 E_λ ハ capacity 0 デアル⁵⁾。

証明: 任意ノ $\varepsilon > 0 =$ 對シテ $C_{E_\lambda} \leq \varepsilon$ ナルコトヲ示セ
 バヨイ。

$r_n \uparrow R$ ヲ $\lambda(r_n) > 2^n \log \frac{1}{\varepsilon} =$ ヨツテ定義シ、 $m(r_n, a)$
 $> 2^n \log \frac{1}{\varepsilon}$ ナル点 a , 集合ヲ $E_n =$ テ表ハセバ (3) 及ビ E_λ
 ノ定義ヨリ

4) $f(z)$ ハ $m(r, a)$ ガ定義サレル如キ函数 ($m(r, a) = +\infty$ ナル a が存
 在シテモヨイ) デナケレバナラナイガ、有理型デアルコトハ勿論、連続
 デアルコトスラ必要デナイ!

5) コノ定理ハ Ahlfors, 定理ヲ精密ニシタモノデアリ。

Ahlfors: Ein Satz von Henri Cartan und seine
 Anwendung auf die Theorie der meromorphen
 Funktionen, Comment. phys-math. soc. Sci. Fenn.
 5 (1931)

及ビ

清水先生: 最近函数論 143 頁 参照。

$$E_\lambda \subset E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots \equiv \bar{E}_\lambda \quad (4)$$

である。故に $C_{\bar{E}_\lambda} \leq \varepsilon$ となる。即ち $V_{\bar{E}_\lambda} \geq \log \frac{1}{\varepsilon}$ となる

を示せばよい。

$V_{\bar{E}_\lambda}$ の定義より任意 $\varepsilon' > 0$ に対し $total\ 1$ の mass
の $\bar{E}_\lambda$ へ、分布 μ が存在して

$$V_{\bar{E}_\lambda} + \varepsilon' > 0. G \int_{\bar{E}_\lambda} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu(w)$$

$$\geq 0. G \int_{E_n} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu(w).$$

となる。 $\mu(E_n) = m_n$ と置けば $\frac{\mu}{m_n}$ は E_n 上で考えられ、 $total\ 1$ の mass の E_n へ、分布であるから

$$V_{\bar{E}_\lambda} + \varepsilon' > m_n \cdot 0. G \int_{E_n} \log \frac{1}{[w, a]} d\left(\frac{\mu(w)}{m_n}\right) \\ \geq m_n \cdot V_{E_n}.$$

故に

$$\frac{1}{V_{E_n}} \geq \frac{m_n}{V_{\bar{E}_\lambda} + \varepsilon'}$$

$$(4) \text{ より } \sum_{n=1}^{\infty} m_n \geq 1 \text{ であるから}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{E_n}} \geq \frac{1}{V_{\bar{E}_\lambda} + \varepsilon'}$$

$\varepsilon' > 0$ は任意であったから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{E_n}} \geq \frac{1}{V_{E_\lambda}} \quad (5)$$

次は各々、 V_{E_n} を評価スル。 V_{E_n} 、定義ヨリ任意、 $\varepsilon'' > 0$ に対シテ *total 1, mass*、 E_n へ、分布 μ_n が存在シテ

$$0. G \int_{E_n} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu_n(w) < V_{E_n} + \varepsilon''$$

トナル。トコロガ一方 $m(r, a)$ 、定義 (2) 及ビ r_n 、定義ヨリ、 $a \in E_n$ に対シテハ

$$2^n \log \frac{1}{\varepsilon} < \int_{\Sigma} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu_{r_n}(w)$$

デアルカラ、両辺 $= \int_{E_n} d\mu_n(a)$ フホドコスト

$$\begin{aligned} 2^n \log \frac{1}{\varepsilon} &< \int_{E_n} d\mu_n(a) \int_{\Sigma} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu_{r_n}(w) \\ &= \int_{\Sigma} d\mu_{r_n}(w) \int_{E_n} \log \frac{1}{[a, w]} d\mu_n(a) \\ &< (V_{E_n} + \varepsilon'') \int_{\Sigma} d\mu_{r_n}(w) = V_{E_n} + \varepsilon'' \end{aligned}$$

$\varepsilon'' > 0$ ハ任意デアツタカラ

$$2^n \log \frac{1}{\varepsilon} \leq V_{E_n}, \quad \frac{1}{V_{E_n}} \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

コレト (5) ヨリ

$$\frac{1}{\nabla_{\bar{E}_\lambda}} \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{又ハ} \quad \nabla_{\bar{E}_\lambda} \geq \log \frac{1}{\varepsilon}$$

ヲ得ル。(証明終)

コノ定理ヲ基本 = スレバ $m(r, a)$ カアル程度ノ増加率
ヲ示ス如キ点 a ノ集合 = 関スル定理が得ラレル。