



Title	函数方程式ニツイテ, IV
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 83, p. 8-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74291
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

368. 函数方程式=就イテ, IV

福原満洲雄(北大)

§9. $F(x)$ が完全連続な一次函数で, $\lambda=1$ が固有値
ナラバ

$$\Phi_{\lambda}(X) \equiv X - \lambda F(X) = x$$

ノ解ハ $\lambda=1$ ノ近傍ヲ

$$X = x - \lambda G_{\lambda}(x),$$

$$G_{\lambda} = \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda-1)^p A_p + \sum_{p=1}^{\mu} (\lambda-1)^{-p} B_p$$

ナル形ニ書ケル、但シ $A_p(x)$, $B_p(x)$ モ亦完全連続ナル一次函数デアル。

定理 26. 「 M_{μ} デ $A_p=0$, N_{μ} デ $B_p=0$ 」

N_{μ} デ考ヘレバ $\lambda=1$ ハ固有値デナイカラ $B_p=0$ トナルコトハ前回ニ注意シテ所デアル。 λ ガ固有値デナイ時ニハ $\Phi_{\lambda}(M_{\mu}) = M_{\mu}$, $\Phi_{\lambda}(N_{\mu}) = N_{\mu}$ デアルコトニ注意スレバ $x \in M_{\mu}$ ナル時 $\Phi_{\lambda}(X) = x$ ヲ満足スル X ハ

$$X = -\frac{1}{\lambda-1}x + \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\Phi(x) - \dots + (-1)^{\mu} \frac{\lambda^{\mu-1}}{(\lambda-1)^{\mu}} \Phi^{\mu-1}(x)$$

ニ依ツテ與ヘテレルコトガ分ル。コレト $X = x - \lambda G_{\lambda}(x)$ ト比較スルコトニ依リ $A_p=0$ ヲ得ル。

$$F + G_{\lambda} = \lambda F G_{\lambda}, \quad F + G_{\mu} = \mu F G_{\mu}$$

カラ簡單ニ計算デ

$$G_{\lambda} - G_{\mu} = (\mu - \lambda) G_{\mu} G_{\lambda} = (\mu - \lambda) G_{\lambda} G_{\mu}.$$

ヲ得ル。コノ關係ニ G_{λ} , G_{μ} ノ $\lambda = \mu = 1$ ニ於ケル展開式ヲ入レテ係數ヲ比較スルコトニヨリ

$$B_{p+q-1} = B_p B_q$$

$$A_p B_q = B_p A_q = 0$$

$$A_{p+q+1} = A_p A_q$$

ヲ得ル、ソコデ

$$\overline{G}_\lambda = \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda-1)^p A_p, \quad \overline{\overline{G}}_\lambda = \sum_{p=1}^{\mu} (\lambda-1)^{-p} B_p$$

ト置ケバ、以上証明シタ所カラ

定理27. 「 $G_\lambda = \overline{G}_\lambda + \overline{\overline{G}}_\lambda$, $\overline{G}_\lambda \overline{\overline{G}}_\mu = \overline{\overline{G}}_\mu \overline{G}_\lambda = 0$, $M_\mu \neq \Lambda$
 $\overline{G}_\lambda = 0$, $\overline{\overline{G}}_\lambda = G_\lambda$; $N_\mu \neq \Lambda$ $\overline{G}_\lambda = G_\lambda$, $\overline{\overline{G}}_\lambda = 0$. $\lambda=1$ $\neq \overline{G}_\lambda$ ハ
 正則, $\overline{\overline{G}}_\lambda$ ハ $\lambda=1$ $\neq$ 極トシテ持テ, 其ノ他ノ点デハ (∞ ヲ
 含メテ) 到ル所正則デアール」

コレト定理16トナラ

定理28. 「 $X - \lambda \overline{F}(X) = 0$, 解ハ $x - \lambda \overline{G}_\lambda(x) = X$
 = 依ツテ、 $X - \lambda \overline{\overline{F}}(X) = x$, 解ハ $x - \lambda \overline{\overline{G}}_\lambda(x) = X =$ 依テ
 與ヘラレル」

Riesz, [13] 「 $X - \lambda \overline{F}(X) = x$, 固有値ハ $\lambda=1$
 デケデアール」ハ此ノ定理ノ一部分トシテ含マレテキル。

§10. $B_1(E) = L$ トスレバ $B_1^2 = B$, カラ L ノ有界集
 合ガ聚ツテキルコトガ分ル、從ツテ L ハ有限ナ次元ヲ持ツ。
 故ニ

$$B_1(x) = \psi_1(x) \varphi_1 + \dots + \psi_n(x) \varphi_n$$

トナル。 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ハ L ニ属スル独立ナ点, $\psi_1(x), \dots$
 $\dots, \psi_n(x)$ ハ E デ完全連続且ツ互ニ独立ナ一次汎函数デ N_μ
 ノ点デハ0トナル。

$$B_1^2 = B_1 \text{ カラ}$$

$$\psi_j(\varphi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ヲ得ル、 $B_2 = B_1 B_2$ デアルカラ

$$B_2(E) \subseteq B_1(E) = L$$

従ッテ

$$B_2(x) = \chi_1(x) \varphi_1 + \dots + \chi_n(x) \varphi_n$$

トナル、更ニ $B_2 = B_2 B_1$ ナル関係ヲ使ヘバ

$$B_2(x) = \sum_{j,k} a_{jk} \psi_k(x) \varphi_j, \quad a_{jk} = \chi_j(\varphi_k)$$

ヲ得ル、一般ニ $B_{p+1} = B_p B_2 = B_2^p$ カラ

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j,k} a_{jk}^{(p)} \psi_k(x) \varphi_j, \quad (a_{jk}^{(p)}) = (a_{jk})^p$$

ヲ得ル、 $B_\mu \neq 0, B_{\mu+1} = 0$ デアルカラ

$$(a_{jk})^\mu \neq 0, \quad (a_{jk})^{\mu+1} = 0$$

デアル、 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ハ L ニ属スル n 個ノ独立ナル元デアレ

バヨイカラ、ソレヲ適當ニトリコトニヨリ行列 (a_{jk}) ヲ標準形トスルコトが出来ル。ソノ結果

$$B_2(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j-1} \psi_{k+1}^{(j)}(x) \varphi_k^{(j)}$$

$$B_{p+1}(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j-p} \psi_{k+p}^{(j)}(x) \varphi_k^{(j)}$$

トナル。但シ

$$\psi_{k+p}^{(j)}(x) = 0 \quad (k+p > m_j), \quad m_1 + \dots + m_r = n$$

デアル。(以上ノ計算ハ大体 Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, Chap. II. = ヨル。) コレデ $B_1, \dots, B_\mu$ ノ構造ガ分ツタ。

§ 11. $\Phi^p B_i = F^p B_{p+i}$ ナル関係カラ

$$\sum_j \sum_k \psi_k^{(j)}(x) \Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = \sum_j \sum_k \psi_{k+p}^{(j)}(x) F^p(\varphi_k^{(j)})$$

ヲ得ル。凡個ノ $\psi_k^{(j)}(x)$ ガ一次的 = 独立デアルカラ

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = F^p(\varphi_{k-p}^{(j)})$$

トナル。但シ $k \leq p$ ノトキ $\varphi_{k-p}^{(j)} = 0$ デアル。故 =

$$\Phi^p(\varphi_k^{(j)}) = 0 \quad (p \geq k)$$

ヲ得ル、コレハ $\varphi_p^{(j)} \in M_p$ ナルコトヲ示ス。 $\varphi_p^{(j)}$ ガ M_{p-1} = 属

シナイコトガ証明サレタトスレバ

$$\Phi(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\varphi_p^{(j)})$$

従ツテ

$$\Phi^p(\varphi_{p+1}^{(j)}) = F(\Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)})) = \Phi^{p-1}(\varphi_p^{(j)}) \neq 0$$

ヲ得ルカラ $\varphi_{p+1}^{(j)}$ ハ M_p = 属シナイ、従ツテ $\varphi_p^{(j)}$ ハ M_p = 属シ M_{p-1} = 属シナイ点デアル。特 = $\varphi_1^{(u)}, \dots, \varphi_1^{(r)}$ ハ M ノ点デアル。

逆 = $\varphi \in M$ トスル。

$$\varphi - F(\varphi) = 0, \quad \varphi - \lambda F(\varphi) = \xi$$

カラ $(1-\lambda)\varphi = \xi$ ヲ得ル。一方 $\varphi = \xi - \lambda G_\lambda(\xi)$ ナ
アルカラ

$$\varphi = B_1(\varphi) + (\lambda-1)^{-1} B_2(\varphi) + \dots + (\lambda-1)^{-\mu+1} B_\mu(\varphi)$$

カ勝手ナ入ニ對シテ成立スル、依テ

$$\varphi = B_1(\varphi), \quad B_2(\varphi) = \dots = B_\mu(\varphi) = 0$$

ヲ得ル、コレカラ φ ガ $\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(r)}$ ノ一次式トシテ表
ハサレルコトヲ知ル。一般ニ歸納法ニ依ツテ M_p ノ点ハ

$$\varphi_k^{(j)} \quad (k=1, 2, \dots, p; \quad j=1, 2, \dots, r)$$

ノ一次式トシテ表ハサレルコトガ証明サレル、故ニ $B_1, \dots$
 $\dots, B_\mu$ ヲ知ルコトニ依テ $M_1, \dots, M_\mu$ ガ求マレル。