OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	有理型函数論ニ於ケル函数m(r,a) ニ就テ, II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 83, p. 22-27
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74295
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

372. 有理型函数論ニ於ケル函数 $m(r,a)$ ニ就イテ, II

角谷靜夫 (阪大)

次ニ更ニ一般ナ除外値ノ集合ノ測度ヲ考ヘル。

コノタメニ Capacity ノ考ヲ拡張スル。(6)

Riemann Sphere Σ 上ノ点集合 E ガ典ヘラレタトキ任意ノ $\delta>0$ ニ對シテ

$$u_\delta(a)=\int_\Sigma \frac{1}{[w,a]^\delta}\,d\mu(w)$$

ヲ考ヘル。コヽニ μ ハ total 1 ノ Mass ノ E 上ヘノ分布ヲ表ハス。 $\underset{a\in\Sigma}{O.G}\ u_\delta(a)=M_{\mu,\delta}(E)$ ノアラユル μ ニ関スル下限ヲ $\nabla_\delta(E)$ トシ,

$C_\delta(E)=\left(\nabla_\delta(E)\right)^{-\frac{1}{\delta}}$ トヨッテ E ノ $\delta-$capacity ヲ定義スル。(記号ノ複雑サヲ避ケルタメニ)

前号ニテ ∇_E, C_E ニテ表ハシタモノヲ $\nabla(E)$, $C(E)$ ニテ表ハスコトニスル。

此ノ如ク $\delta-$Capacity ヲ定義スレバ次ノ定理ガ成立スル。

定理 $f(z)$ ガ $|z|<R$ ニテ有理型ニテ $\lim_{r\to R} T(r)=\infty$ デアレバ任意ノ $\delta>0$ ニ對シテ

---

6) Frostman: Thèse, 48 p.

$$\overline{\lim_{r\to R}}\ \frac{m(r,a)}{\log T(r)} > \frac{1}{\delta} \tag{6}$$

が成立スル点 a ノ集合 E_δ ハ δ-capacity 0 デアル.

証明: 先ヅ $\nabla_\delta(E)$ 及ビ $C_\delta(E)$ = 関スル二三ノ不等式ヲ証明スル.

$E \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ デアレバ

$$\frac{1}{\nabla_\delta(E)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nabla_\delta(E_n)} \tag{7}$$

ナルコトハ $\nabla(E) \equiv \nabla_E$ ノ場合ト同様ニ証明スルコトが出来ル.[7]

又 $\delta > \delta' > 0$ ニ對シテ

$$\left[\int_\Sigma \frac{1}{[w,a]^\delta}\, d\mu(w)\right]^{\frac{1}{\delta}} \geqq \left[\int_\Sigma \frac{1}{[w,a]^{\delta'}}\, d\mu(w)\right]^{\frac{1}{\delta'}}$$

$$\geqq \exp.\left[\int_\Sigma \log \frac{1}{[w,a]}\, d\mu(w)\right]$$

デアルカラ

$$\left(\nabla_\delta(E)\right)^{\frac{1}{\delta}} \geqq \left(\nabla_{\delta'}(E)\right)^{\frac{1}{\delta'}} \geqq e^{\nabla(E)} \tag{8}$$

又ハ $C_\delta(E) \leqq C_{\delta'}(E) \leqq C(E)$ (9)

---

7) Frostman: Thèse 53頁參照。コノ証明デハ

$$\frac{1}{\nabla(E_n)} \geqq \frac{m_n}{\nabla(E)+\varepsilon} \quad \text{ヨリ} \quad \frac{1}{\nabla(E_n)} \geqq \frac{m_n}{\nabla(E)}$$

ナル関係ヲ出シテアリマスガ、コレハ ε = 関スル和ヲ取ッテカラ $\varepsilon \to 0$ トスルベキデアルト思ヒマス。

又(7)ヨリ δ-capacity 0 ナル集合ノ可附番個ノ和集合ハ又 δ-capacity 0 デアルコトガワカル。

依ッテ定理ヲ証明スルニハ

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{m(r,a)}{\log T(r)} > \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right) \tag{10}$$

ヲ満足スル点 a ノ集合 $E_{\delta,m}$ が δ-capacity 0 デアルコトヲ示セバ十分デアル。($E_\delta \subset \sum_{m=1}^{\infty} E_{\delta,m}$ デアルカラ)

次ニ r_n ヲ $T(r_n)=n$ ニヨッテ定義シ($r_n \uparrow R$ トナル)

$$m(r_n,a) > \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n \tag{11}$$

ヲ満足スル点 a ノ集合ヲ $E_{\delta,m,n}$ トスレバ，任意ノ N ニ対シテ

$$E_{\delta,m} \subset \sum_{n=N+1}^{\infty} E_{\delta,m,n} \equiv E_{\delta,m}^{N} \tag{12}$$

デアル。何者，モシ

$$a \in E_{\delta,m}^{N}$$

デアレバ $n>N$ ニ対シテ $a \in E_{\delta,m,n}$ デアルカラ

$$m(r_n,a) \leqq \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n = \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)T(r_n)$$

トナリ $r_n \leqq r < r_{n+1}$ ニ於テハ

$$m(r,a) = \{T(r,a)-T(r_n,a)\} - \{N(r,a)-N(r_n,a)\} + m(r_n,a) \leqq m(r_n,a)+1$$

デアルカラ

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{m(r,a)}{\log T(r)} \leqq \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

トナッテ (10) ガ成立シナイ。ヨッテ $a\overline{\in}E_{\delta,m}$ トナル。

トコロガ $E_{\delta,m,n}$ ノ定義 (11) ヨリ、前号デ述ベタト同様ナ計算ヲスレバ

$$\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)\log n \leqq \nabla(E_{\delta,m,n})$$

(8) ヨリ

$$\left(\nabla_\delta(E_{\delta,m,n})\right)^{\frac{1}{\delta}} \geqq n^{\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

又ハ

$$\frac{1}{\nabla_\delta(E_{\delta,m,n})} \leqq \frac{1}{n^{1+\frac{1}{m}}}$$

ヨッテ (12) ヨリ任意ノ N ニ對シテ

$$\frac{1}{\nabla_\delta(E_{\delta,m})} \leqq \frac{1}{\nabla_\delta(E^{N}_{\delta,m})} \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{m}}}$$

右辺ノ級数ハ収斂スルカラ N ヲ十分大キクトレバイクラデモ小サクナル。即チ $E_{\delta,m}$ ハ δ-capacity 0 デアル。(証明終)

コノ定理ハ Ahlfors ノ定理[8] ニ相當スルモノデアルガ Ahlfors ノ定理ハ E_δ ガ t^δ-measure 0 デアルコトヲ云ッテオル。

---

8) Ahlfors ノ論文 (前号脚註(5)) 及ビ清水先生：解析函数論 149頁参照。

Frostman ノ証明シタ如ク[9] E ノ δ-capacity ガ 0 デアレバ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta+1}}\,dt$$

ガ有限デアル如キ $h(t)$ ニ対シテ E ハ h-measure ガ 0 トナル（$\delta=0$ ナルトキハ logarithmic capacity ヲトル）カラ、前号ノ定理ハ明カニコレニ相当スル Ahlfors ノ定理ノ拡張ニナッテヰルガ、本号ノ定理ハ、ソノマヽノ形デハ必ズシモコレニ相当スル Ahlfors ノ定理ノ拡張ニハナッテヰナイ[10]。

然シ上ニ述ベタコトニヨッテ

$$E_\delta \subset \sum_{m=1}^{\infty} E_{\delta,m}$$

デアッテ、各々ノ $E_{\delta,m}$ ハ δ-capacity ガ 0 デアルノミデナク $\delta_m=\delta\left(1+\frac{1}{2m}\right)$ トオケバ δ_m-capacity ガ 0 デアルカラ上記ノ Frostman ノ定理ニヨッテ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta_m+1}}\,dt$$

ガ存在スル如キ $h(t)$ ニ対シテ $h(t)$-measure ガ 0 トナル。

---

9) Frostman : Thèse 86 頁.

10) E ノ δ-capacity ガ 0 デアルトキ E ハ t^δ-measure ガ 0 デアルカドウカハ分ラナイ。

依ッテ $E_{\delta,m}$ ハ t^{δ}-measure 0 デアル。

t^{δ}-measure 0 ナル集合ノ可附番個ノ和ハ又 t^{δ}-measure 0 デアルカラ E_{δ} ハ t^{δ}-measure 0 デアル。