



Title	有理型函数論ニ於ケル函数 $m(r, a)$ ニ就テ, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 83, p. 22-27
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74295
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

372. 有理型函数論 = 於ケル函数 $m(r, \alpha)$ = 就イテ, II

角 谷 静 夫 (阪大)

次 = 更 = 一般 + 除外値ノ集合ノ測度ヲ考ヘル。

コノタメ = Capacity ノ考ヲ拡張スル。⁽⁶⁾

Riemann Sphere Σ 上ノ点集合 E が與ヘラレタトキ任意, $\delta > 0$ = 對シテ

$$\mu_\delta(a) = \int_{\Sigma} \frac{1}{[w, a]^\delta} d\mu(w)$$

ヲ考ヘル。コハ = μ ハ total / , Mass , E 上ヘノ分布ヲ表ハス。 $0 < \mu_\delta(a) = M_{\mu, \delta}(E)$, アラエル μ = 關スル

下限ヲ $\nabla_\delta(E)$ トシ,

$C_\delta(E) = (\nabla_\delta(E))^{-\frac{1}{\delta}}$ 々ヨツテ E , δ -capacity ヲ定義スル。(記号ノ複雑サヲ避ケルタメニ)

前号 = テ ∇_E , C_E = テ表ハシタモノヲ $\nabla(E)$, $C(E)$ = テ表ハスコト = スル。

此ノ如ク δ -Capacity ヲ定義スレバ次ノ定理が成立スル。

定理 $f(z)$ が $|z| < R$ = テ 有理型 = テ $\lim_{r \rightarrow R} T(r) = \infty$
デアレバ任意, $\delta > 0$ = 對シテ

6) Frostman: Thèse, 48 p.

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{m(r, a)}{\log T(r)} > \frac{1}{\delta} \quad (6)$$

が成立スル点 a 、集合 E_δ は δ -capacity 0 デアル。

証明: 先ヅ $\nabla_\delta(E)$ 及 $C_\delta(E)$ = 関スル二三ノ不等式ヲ証明スル。

$$E \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{デアレバ}$$

$$\frac{1}{\nabla_\delta(E)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nabla_\delta(E_n)} \quad (7)$$

ナルコトハ $\nabla(E) \equiv \nabla_E$ ノ場合ト同様ニ証明スルコトが出来ル。⁷⁾

又 $\delta > \delta' > 0$ = 對シテ

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Sigma} \frac{1}{[w, a]^\delta} d\mu(w) \right]^{\frac{1}{\delta}} &\geq \left[\int_{\Sigma} \frac{1}{[w, a]^{\delta'}} d\mu(w) \right]^{\frac{1}{\delta'}} \\ &\geq \exp \left[\int_{\Sigma} \log \frac{1}{[w, a]} d\mu(w) \right] \end{aligned}$$

デアルカラ

$$\left(\nabla_\delta(E) \right)^{\frac{1}{\delta}} \geq \left(\nabla_{\delta'}(E) \right)^{\frac{1}{\delta'}} \geq e^{\nabla(E)} \quad (8)$$

$$\text{又ハ} \quad C_\delta(E) \leq C_{\delta'}(E) \leq C(E) \quad (9)$$

7) Frostman: These 53頁参照。コノ証明デハ

$$\frac{1}{V(E_n)} \geq \frac{m_n}{V(E) + \varepsilon} \quad \text{ヨリ} \quad \frac{1}{V(E_n)} \geq \frac{m_n}{V(E)}$$

ナル関係ヲ出シテアヤマスガ、コレハ $n = \infty$ スル和ヲ取ツテカラ $\varepsilon \rightarrow 0$ トスルベキデアレト思ヒマス。

又 (7) より δ -capacity 0 なる集合ノ可附番個ノ和集合
ハ又 δ -capacity 0 ナルコトガワカル。

依ツテ定理ヲ証明スルニハ

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{m(r, a)}{\log T(r)} > \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (10)$$

ヲ満足スル点 a 、集合 $E_{\delta, m}$ が δ -capacity 0 ナル
コトヲ示セバ中合デアイル。($E_{\delta} \subset \sum_{m=1}^{\infty} E_{\delta, m}$ ナルカラ)

次ニ $r_n \rightarrow T(r_n) = n$ = ヲツテ定義シ ($r_n \uparrow R$ トナル)

$$m(r_n, a) > \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log n \quad (11)$$

ヲ満足スル点 a 、集合ヲ $E_{\delta, m, n}$ トスレバ、任意、 $N =$ 對
シテ

$$E_{\delta, m} \subset \sum_{n=N+1}^{\infty} E_{\delta, m, n} \equiv E_{\delta, m}^N \quad (12)$$

デアイル。何者、モシ

$$a \in E_{\delta, m}^N$$

ナアレバ $n > N$ = 對シテ $a \in E_{\delta, m, n}$ ナアルカラ

$$m(r_n, a) \leq \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log n = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right) T(r_n)$$

トナリ $r_n \leq r < r_{n+1}$ = 於テハ

$$m(r, a) = \{T(r, a) - T(r_n, a)\} - \{N(r, a) - N(r_n, a)\} \\ + m(r_n, a) \leq m(r_n, a) + 1$$

デアルカラ

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{m(r, a)}{\log T(r)} \leq \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

トナツテ (10) が成立シナイ。ヨツテ $a \in E_{\delta, m}$ トナル。

トコロが $E_{\delta, m, n}$ の定義 (11) ヨリ、前号で述べたと同様に計算ヲスレバ

$$\frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log n \leq \nabla(E_{\delta, m, n})$$

(8) ヨリ

$$(\nabla_{\delta}(E_{\delta, m, n}))^{\frac{1}{\delta}} \geq n^{\frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

又ハ

$$\frac{1}{\nabla_{\delta}(E_{\delta, m, n})} \leq \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{m}}}$$

ヨツテ (12) ヨリ任意 N に対シテ

$$\frac{1}{\nabla_{\delta}(E_{\delta, m})} \leq \frac{1}{\nabla_{\delta}(E_{\delta, m}^N)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{m}}}$$

右辺ノ級数ハ収斂スルカラ N 十分大キクトレバイクラデモ小サクナル。即チ $E_{\delta, m}$ ハ δ -capacity 0 デアル。(証明終)

コノ定理ハ Ahlfors の定理⁸⁾ = 相當スルモノデアルが Ahlfors の定理ハ E_{δ} が t^{δ} -measure 0 デアルコトヲ云ツテナル。

8) Ahlfors, 論文(前号脚註5) 及び清水先生: 最近函数論 149頁参照。

Frostman / 証明シタ如⁹⁾ E , δ -capacity が
0デアレバ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta+1}} dt$$

が有限デアル如キ $h(t)$ = 對シテ E へ h -measure が 0 ト
ナル ($\delta=0$ ナルトキハ logarithmic capacity フト
ル) ナラ、前号ノ定理ハ明カ=コレ=相當スル Ahlfors ノ
定理ノ拡張=ナツテキルガ、本号ノ定理ハ、ソノマデノ形デ
ハ必ズシモコレ=相當スル Ahlfors ノ定理ノ拡張=ハナ
ツテキナイ¹⁰⁾。

然シト=述べタコト=ヨツテ

$$E_\delta \subset \sum_{m=1}^{\infty} E_{\delta, m}$$

デアツテ、各々ノ $E_{\delta, m}$ へ δ -capacity が 0デアルノ
ミデナ⁷ $\delta_m = \delta(1 + \frac{1}{2m})$ トオケバ δ_m -capacity が
0デアルカラ上記ノ Frostman ノ定理=ヨツテ

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{\delta_m+1}} dt$$

が存在スル如キ $h(t)$ = 對シテ $h(t)$ -measure が 0 トナ
ル。

9) Frostman: Thèse 86 頁.

10) E , δ -capacity が 0デアルトキ E へ t^δ -measure が 0デア
ルカド⁷カハナラナイ。

依ツテ $E_{\delta, m}$ は t^δ -measure 0 デアル。

t^δ -measure 0 ナル集合ノ可附番個ノ和ハ又 t^δ -measure 0 デアルカラ E_δ ハ t^δ -measure 0 デアル。