



Title	單一連結面分ノerreichbarナ境界点ノ次元
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 83, p. 27-35
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74296
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

373. 単一連結面分、*erreichbar* + 境界点、次元

寺 阪 英 孝 (阪大)

S. Mazurkiewicz, 論文¹⁾で、解析函数、特異点
がアル *Metrik* (或ハ近傍系)、下ニ丁度 2-dimensional
ニナルカ如何カジ問題トナツテキマスガ、之レヲ
实例ニヨツテ解決ショウトシマシタラ、具合ノ悪イ集合が出
テ來テウマク参リマセン。元ノ問題ニハ触レズニ、コノ集合
ヲ下デ求メテミマセウ。結果ハ定理ノ形デ述ベレバ

定理 *erreichbar* + 境界点、全体ガ 0-dimensional
デアルヌウナ単一連結ナ面分が存在スル²⁾。

ユノ例ハ同時ニ次ノ定理ヲ與ヘマス。

1) S. Mazurkiewicz: Sur les points singuliers
d'une fonction analytique (Fund. Math.
XVII, 1931)

2) 境界ガ一点ハヨリ成立スル *trivial* ナ場合ヲ除ク。

定理 集合 M の任意ノ二点 x, y ヲ内外 = 分ツイカナル

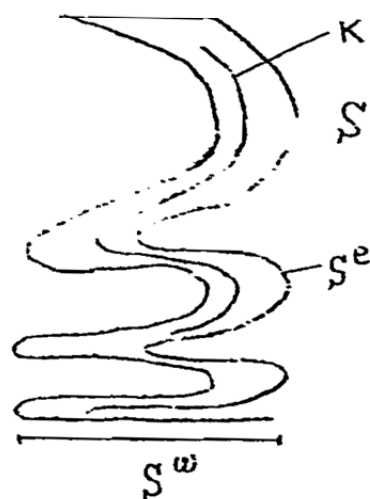
Jordan 曲線 $\in M$ ト共通点ヲ有スル如キ、0-dimensional
ト集合ガ平面上ニ存在スル。

$$\S 1. \quad S^e = \begin{cases} x = \sin \frac{1}{y}, & 0 < y \leq \frac{1}{2\pi} \\ x = \sin \frac{1}{y} + a, & 0 < y \leq \frac{1}{2\pi} \quad (a > 0) \\ 0 \leq x \leq a, & y = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

$$S^w: -1 \leq x \leq 1+a, y=0$$

ナル曲線ヨリ成立スル圖形 $S = S^e + S^w$

ヲ S 圖形トイヒ、 $S =$ 囲マレタ有界
面分ヲ S^o 、 S^o ノ閉包ヲ單 = $\bar{S}$ デ表
ハス。 S^e ハ S^o ノ *erreichbar*
ト境界線、 S^w ハ *nicht erreich-*
bar ト境界線デアル。 S^o ノ中 =



$$K: \quad x = \sin \frac{1}{y} + \frac{a}{2} \\ 0 < y \leq \frac{\theta}{2\pi} \quad (0 < \theta < 1)$$

ナル曲線 K ヲ入レルコトヲ、 S 圖形 = 切目ヲ入レルト云ヒ、
 K ヲ S ノ切目ト云フ。

平面ノ *topologisch* ト寫像 = ヨル (上) コレヲト等型ト
圖形 = 同ジ記号、同ジ名稱ヲ用ヒルコトスル。

$\S 2.$ 次 = 平行線

$$y=0, \quad y=\frac{1}{2\pi}$$

ノ間 =

$$S_n: x = \sin \frac{1}{y} + \frac{n}{2} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ナル曲線ヲ入レ ($\Delta_{2n}, \Delta_{2n+1}$) ト平行線ノ一部トカラナル S 図形ヲ S_n , ソノ切目ヲ k_n トスル。

$y=0$, $y=1$ ナル平行線間ノ面分ヲ B トスルベ

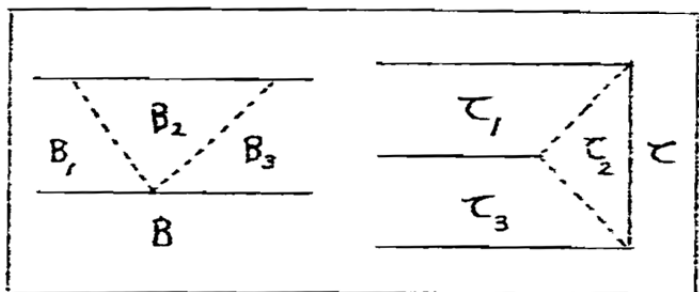
$$B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{S}_n, \quad B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n$$

ハイツレモ單一連結デ、 $y=0$ ナル直線ハソノ *nicht erreichbar* ノ境界線トナツテキル。今三本ノ半直線

$$y = \pm \frac{1}{2\pi}, \quad x \leq \frac{1}{2\pi}$$

$$y = 0, \quad x \leq 0$$

ト線分



$$-\frac{1}{2\pi} \leq y \leq \frac{1}{2\pi}, \quad x = \frac{1}{2\pi}$$

トカラ成ル図形ヲ圖ノヌウニ τ, τ_2, τ_3 ノ三部ニ分チ、又 B ヲモ圖ノヌウニ B, B_2, B_3 ニ三分シテ τ, τ_2, τ_3 ヲ夫々 B, B_2, B_3 ニ境界ヲモコメテ *topologisch* = 對應セシメ、尚 $\tau, \tau_2, \tau_2 \cdot \tau_3$ ナル境界ガ夫々 $B_1 \cdot B_2, B_2 \cdot B_3$ = 對應スルヌウニシテオケベ、コノ寫像ニヨツテ B 中ノ S_n, k_n ハト亦ノ等型ナ圖形 σ_n, κ_n = 寫像ナレル。

コノトキ

$$\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n, \quad \tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_n$$

ハ單一連結ノ面分デアツテ τ ノ切目トモイフベキ κ (即チ

$y=0, x \leq 0$ ナル半直線) ハソ、*nicht erreichbar* + 境界線デアル。

§3. Sノ細分. S図形Sト上述, τ トノ間 = *topologisch* + 寫像ヲツクリ、Sノ切目Kガ τ ノ切目 $K =$ 對應スルヤウニシ。且ツSノ *erreichbar* + 境界線 S^e ガ τ ノ境界 = 對應スルヤウニスレバ、コノ寫像デ $\sigma_n, K_n =$ 對應スルモノヲ S_n, K_n トスルト

$$(1) S^o = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_n, \quad S^e = \sum_{-\infty}^{\infty} K_n$$

ハイザレモ單一連結ナ面分デ、Sノ切目Kハコノ双方、*nicht erreichbar* + 境界線トナリ、

$$(2) K = \sum S_n^w$$

トカケル。(ココ = S_n^w ハ §1ノ意味デ S_n^o 、*nicht erreichbar* + 境界線、以後同様)

切目ノ入ッテキルS図形 = 斯様ナ S_n, K_n ヲ入レルコトヲ Sノ細分 トイフ。

§4. 以上ヲ元ニシテ求ムル面分Gヲ作圖スル。ソノタメ最初ニ変換 $w = e^{\pi iz}$ = ヨツテZ平面上ノ帯形BヲW平面ノ環形 = 寫像スルト、B内ノ S_n, K_n ハ單位円 $Q: |w| < 1$ 内ノS図形トソノ切目ト = ナル。コレヲ $S_{n_1}, K_{n_1} (n_1 = 1, 2)$ トカク。ソウスレバ

$$(3) G_1 = Q - \sum_{n_1=1}^2 \bar{S}_{n_1}$$

$$(4), Q_1 = Q - \sum K n_1$$

ハイツレモ單一連結+面分デ Q , 境界 $B(Q)$ ハ双方,
nicht erreichbar + 境界線トナリ、次式が成立ス
 ル。

$$(5), B(Q) = \bar{Q} - Q = G_1^w = Q_1^w = \sum S n_1^w$$

次 = $S n_1$, §3ノ方法 = 從ッテ細分シ、得ラレタ S 図形、
 切目ヲ $S n_1 n_2, K n_1 n_2$ ($n_2 = 0, \pm 1, \pm 2$) デ表ハス。同様 =
 シテ一般 = $S n_1 n_2 \dots n_{\nu-1}$ カラ $S n_1 \dots n_{\nu-1} n_\nu, K n_1 \dots n_{\nu-1} n_\nu$
 等ヲ求メ、次ノヤウ = オク。

$$(3)_\nu G_\nu = Q_{\nu-1} - \sum_{(n_1, \dots, n_\nu)} \bar{S}_{n_1 n_2 \dots n_\nu} \left(\begin{array}{l} \sum \text{ハスベテノ } n_1, n_2, \\ \dots n_\nu = \gamma \text{ イテノ和} \end{array} \right)$$

$$(4)_\nu Q_\nu = Q_{\nu-1} - \sum_{(n_1, \dots, n_\nu)} K_{n_1 n_2 \dots n_\nu}$$

但シコノ際

$$(6) \delta(S n_1 n_2 \dots n_\nu) < \frac{1}{2^\nu}$$

ノヤウ = シテ置ク。 ($\delta(M)$ ハ M ノ直径)、細分ノ性質カラ

$$(7) K_{n_1 \dots n_\nu} \subset S_{n_1 \dots n_{\nu-1} n_\nu}^0 \subset S_{n_1 \dots n_{\nu-1}}^0$$

$$(5)_\nu K_{n_1 \dots n_{\nu-1}} = \sum S_{n_1 \dots n_{\nu-1}}^w$$

§3. (1) = 對スル K ノ性質カラ $K_{n_1 \dots n_{\nu-1}} \wedge S_{n_1 \dots n_{\nu-1}}^0$
 = $\sum_n \bar{S}_{n_1 \dots n_{\nu-1} n}$ ノ *nicht erreichbar* + 境界線。
 ヲツテ又 G_ν 及ビ Q_ν , *nicht erreichbar* + 境界線
 デモアル。

即チ

$$(8) \quad x \in K_{n_1, \dots, n_{\nu-1}} \rightarrow x \in G_{\nu}^w, \quad x \in Q_{\nu}^w$$

$$x = G_{\nu+1} = Q_{\nu} - \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_{\nu}, n_{\nu+1}}$$

$$(4)_{\nu} = \exists \text{リ}$$

$$= (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1, \dots, n_{\nu}}) - \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_{\nu}, n_{\nu+1}}$$

$$(7) = \exists \text{リ}$$

$$\supset (Q_{\nu-1} - \sum K_{n_1, \dots, n_{\nu}}) - \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_{\nu}}$$

$$\text{同ジク } (7) = \exists \text{リ}$$

$$= Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_{\nu}}$$

$$= G_{\nu}$$

ヨツテ

$$G_{\nu-1} \subset G_{\nu}$$

$$\text{よ } G = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}$$

トオケル

$$G_{\nu} \subset G$$

$$\text{又 } (3)_{\nu}, (4)_{\nu} \exists \text{リ}$$

$$G_{\nu} \subset Q_{\nu-1}$$

$$Q_{\nu} \subset Q_{\nu-1}$$

$$\exists \text{ツテ } m, n \geq 1 = \text{對シ}$$

$$G_m \subset Q_n$$

$$\text{故ニ } G \subset Q_{\nu}$$

$$\S 5. \quad x \in S_{n_1, \dots, n_{\nu}}^w \text{ + ル 任意, 一点ヲ } x \text{ ヲ トル}$$

$$(5)_{\nu} = \exists \text{リ}$$

$$x \in K_{n_1, \dots, n_{\nu-1}} \quad (\nu=1 \text{ たらバ } x \in B(Q))$$

$$\text{故ニ } (8) \text{ 及ビ } (5), \text{ カラ } x \in Q_\nu^\omega \text{ 及ビ } x \in G_\nu^\omega$$

$$\text{然ルニ } G_\nu \subset G \subset Q_\nu \text{ 十ル故}$$

$$x \in G^\omega$$

即チ

(9) $x \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^\omega$ 十ル点ハ G へ nicht erreichbar
ノ境界点デアアル。 ($\nu=1, 2, \dots$)

$$\text{次ニ } x \notin$$

$$x \in \bar{Q} - G$$

トスレバ

$$\begin{aligned} x \in \bar{Q} - G &= \bar{Q} - \sum G_\nu \subset \bar{Q} - G_\nu \\ &= \bar{Q} - (Q_{\nu-1} - \sum \bar{S}_{n_1, n_2, \dots, n_\nu}) \\ &\subset \bar{Q} - Q_{\nu-1} + \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_\nu} \end{aligned}$$

$$\text{然ルニ } (4)_\nu, (5), (5)_\nu \text{ ヲリ}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} - Q_{\nu-1} &= (\bar{Q} - Q) + (Q - Q_{\nu-1}) \\ &= \sum S_{n_1}^\omega + \sum K_{n_1} + \sum K_{n_1, n_2} + \dots + \sum K_{n_1, \dots, n_{\nu-1}} \\ &= \sum S_{n_1}^\omega + \sum S_{n_1, n_2}^\omega + \dots + \sum S_{n_1, n_2, \dots, n_\nu}^\omega \end{aligned}$$

依ツテ上式カラ x ハアル $\lambda =$ ツキ

$$x \in S_{n_1, n_2, \dots, n_\lambda}^\omega$$

トナルカ、然ラザレバ $x \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^e$ 或ハ $x \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^o$

$$\text{モシ } x \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^e \text{ タトスレバ } S_{n_1, \dots, n_\nu}^e \subset G_{\nu+1} \subset G$$

トナルカラ、矛盾スル。ヨツテ

$$(10) \quad x \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^o$$

デナケレバナラヌ。レハ任意デアルカラ、差シスベテノ $n_1, \dots$
 $\dots n_\nu$, $\nu = \text{對シテ } x \notin S_{n_1, \dots, n_\nu}^\omega$ ナラバ、アテユル $\nu =$
 對シテ (10) が成立スル如キ $n_1, \dots, n_\nu$ がナケレバナラヌ。然
 ルニ

$$S_{n_1, \dots, n_\nu}^\circ \cdot S_{m_1, \dots, m_\nu, \dots, m_\lambda}^\circ \neq 0 \quad (\lambda \geq \nu)$$

が成立スルノハ $n_1 = m_1, \dots, n_\nu = m_\nu$ ノ時ニカギルカラ
 唯一ツ数列 $n_1, n_2, \dots, n_\nu = \text{對シテ}$

$$x \in S_{n_1}^\circ \quad x \in S_{n_1, n_2}^\circ \quad x \in S_{n_1, \dots, n_\nu, \dots}^\circ$$

(6) カラ $\delta(S_{n_1, \dots, n_\nu}^\circ) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$ ナル故

$$(11) \quad x = \prod_{\nu=1}^{\infty} S_{n_1, n_2, \dots, n_\nu}^\circ$$

斯ノ x ナル x ハ G , *erreichbar* ナ境界点デアル。

何者、 $a_\nu \in S_{n_1, \dots, n_\nu}^\circ$ ナル a_ν 点ヲトリ出シ、両端ガ $a_\nu,$
 $a_{\nu+1}$ ナル *Jordanbogen* b_ν ナ (両端ヲ除キ) $\subset S_{n_1, \dots,$
 $\dots n_\nu - \sum \bar{S}_{n_1, \dots, n_{\nu+1}}$ ナル ε ノヲ考ヘルハ、 $\sum b_\nu$ ハ $\rightarrow x$
 ナル G 内ノ連続曲線デカラデアル。

§ 6. § 5 = ヨリ $\bar{Q} - G$ ノ点ハ G , *nicht erreich-*
bar ナ境界点デアルカヌハ (11) デ表ハサレル G , *erreich-*
bar ナ点カデアルコトガ判ツタ。 $\bar{G} - G \subset \bar{Q} - G$ デカラ從ツ
 テ G ノ境界点ハ上述ノ ε ノデ盡キル。今

$$(12) \quad \sum_{(a_1, \dots, a_\nu)} \prod_{\nu=1}^{\infty} S_{n_1, \dots, n_\nu}^\circ$$

ナル集合ヲ考ヘルト、コレハ G ノ境界ニ属スルカラ (12) ハ G

、 *erreichbar* + 境界点、全体ト一致スルコト = ナル。

コ、集合ハ明カ = *0-dimensional* ナル故、 G が求ムル
面分デアル。