OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	有限個領域ニ於ケル函數ノErzeugungニ就イテ
Author(s)	伊藤, 誠; 内藤, 實
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 85, p. 1-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74302
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

377. 有限個領域ニ於ケル函數ノ Erzeugung ニ就イテ

伊藤誠，内藤實（御影師範）

角谷氏ガ第62号229ニ於イテ変域モ値域モ有限個領域 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n\}$ デアル任意ノ函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_p)$ ガ或ル一ツノ二変数ノ函数ヲ何回カ iterieren スルコトニヨリ erzeugen サレ得ルコトヲ証明サレタ。其ノ後、既ニ1935年5月ノ Am. National Acad. of Science 上デ米國ノ Webb ガソレト異ナル函数ニヨッテ同様ノコトヲ論ジテキルノヲ見タ。然シ其ノ論文ハ、記号ソノ他ノ点デ多少理解シ難イ感ジガスルノデ其等ヲ書キ改ヘテ、次ニ御紹介シタイト思フ。

次ノ表ニヨッテ定義サレル函数ヲ $\varphi(x, y)$ トス。（空白ノ部分ノ数字ハ0トス）

$\longrightarrow y$

$\downarrow x$

φ	0	1	2	⋯	⋯	$n-1$	n
0	1	0	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1	0	2	0	⋯	⋯	⋯	⋯
2	⋮	0	3	⋱			
⋮	⋮	⋮	0	⋱	⋱		
⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋱	0	
$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	0	n	0
n	0	⋮	⋮	⋮		0	0

$g_1(x)=\varphi(x,x)\equiv x+1\ (mod.\ \nu=n+1)$ デアルカラ $g_1(x)$ ヲ iterieren スルコトニヨリ $g_h(x)=x+h$ ハ $\varphi(x,y)$ ニヨッテ ergeugen サレル。又 $g_{n-h}(x)=g_{-h}(x)$ トスル。

函数 $R^i_{\lambda,\mu}(x,y)$ ヲ次ノ如ク定義シ、$R^i_{\lambda,\mu}$ ト略記スル。

$$R^i_{\lambda,\mu}(x,y)=i,\quad x=\lambda,\quad y=\mu \text{ ナルトキ}$$

$$R^i_{\lambda,\mu}(x,y)=0,\quad x\neq\lambda \text{ or } y\neq\mu \text{ ナルトキ}$$

然ラバ

$$R^0_{\lambda,\mu}=\varphi(x,g_1(x))=0$$

$$R'_{\lambda,\mu}=\varphi\{g_{-1}[\varphi(g_{-\lambda}(x),g_{-\mu}(y))],\varphi(x,g_1(x))\}$$

何故ナラバ

$$\text{右辺}=\varphi\{g_{-1}[\varphi(x-\lambda,y-\mu)],0\}$$

$x=\lambda,\ y=\mu$ ノトキ $g_{-1}[\varphi(x-\lambda,y-\mu)]=g_{-1}(\varphi(0,0))=0$

$$\therefore\ \text{右辺}=\varphi\{0,0\}=1$$

$x\neq\lambda$ or $y\neq\mu$ ノトキ $\varphi(x-\lambda,y-\mu)\neq 1$ トナリ

$$g_{-1}[\varphi(x-\lambda,y-\mu)]\neq 0$$

$$\therefore\ \text{右辺}=0$$

次ニ

$$R^i_{\lambda,\mu}=\varphi\{g_{i-2}(R'_{\lambda,\mu}),\ g_{i-1}(R^0_{\lambda,\mu})\}$$

何故ナラバ

$$\text{右辺}=\varphi\{g_{i-2}(R'_{\lambda,\mu}),\ i-1\}$$

$x=\lambda$, $y=\mu$ ナルトキ 右辺$=\varphi\{g_{i-2}(0), i-1\}=i$

$x\neq\lambda$ or $y\neq\mu$ ナルトキ $R'_{\lambda,\mu}\neq 1$ トナリ

$g_{i-2}(R'_{\lambda,\mu})\neq i-1$

$\therefore$ 右辺$=0$

故ニ $R^i_{\lambda,\mu}$, $(i=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ ハ $\varphi(x,y)$ ヲ有限回 *iterieren* スルコトニヨッテ *erzeugen* スルコトガ出来ル。

$$\delta(x,y)=\varphi(x,g_n(y))$$

$$\alpha_i(x,y)=\delta(N_{i-1},g_1(M_{i-1}))$$

$(i=1,2,\cdots\cdots\cdots,n)$

$$M_0=R^0_{0,0},\quad M_k=\alpha_k\left(M_{k-1},\alpha_k(R^k_{0,k+1},R^k_{k+1,0})\right)$$

$$N_0=R'_{0,0},\quad N_k=\alpha_k(M_k,N_0)$$

ト定義スレバ，$\delta(x,y)$ ハ次ノ表デ與ヘラレル。

$\delta(x,y)$ ↓x / y→	0	1	2	⋯⋯	$n-1$	n
0		1	0			
1		0	2	⋱		
2				⋱		
⋮				⋱	0	
				⋱	$n-1$	0
$n-1$						n
n	0	0				

次ニ函數 $\alpha_n(x, y)$ ガ次ノ表ニヨツテ表ハサレルコトヲ証明シヨウ。

$\longrightarrow y$

α_n	0	1	2	----------	n
0	0	1	2	----------	n
1	1	1	1		
2	2	1			
⋮	⋮			1	
n	n				

$\downarrow x$

即チ
$x=0$ or $y=0$
ナルトキ
$\alpha_n(x, y)=x+y$

(証明) $i=1$ ナルトキ

$$\alpha_1(x, y)=\delta(N_0\ g_1(M_0))$$

$$M_0=R^0_{0,0} \qquad N_0=R^1_{0,0}$$

ヨリ

$\longrightarrow y$

α_1	0	1	2	---------- n
0	0	1	1	---------- 1
1	1	1	1	
2	1	1	1	
⋮	⋮			1
n	1			

$\downarrow x$

$i=2$ ナルトキ

$$\alpha_2(x,y)=\delta(N_1,\ g_1(M_1)),$$

$$M_0=R^0_{0,0} \qquad M_1=\alpha_1(M_0,\alpha_1(R'_{0,2},\ R'_{2,0}))$$

$$N_0=R'_{0,0} \qquad N_1=\alpha_1(M_1,N_0)$$

$\longrightarrow y$

M_1	0	1	2	⋯⋯	n
0	0	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
⋮	0		0		
n					

$x\downarrow$

$\longrightarrow y$

N_1	0	1	2	⋯⋯	n
0	1	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
⋮	0		0		
n					

$x\downarrow$

$\longrightarrow y$

$g_1(M_1)$	0	1	2	⋯⋯	n
0	1	1	2	1	
1	1	1			
2	2				
⋮	1		1		
n					

$\longrightarrow y$

α_2	0	1	2	⋯⋯	n
0	0	1	2	1	
1	1	1			
2	2				
⋮	1		1		
n					

$x\downarrow$

$i=m$ ナルトキ $\alpha_m(x,y)$, M_{m-1}, N_{m-1} ガ夫々次表ノ如ク表ハサレルト假定スレバ

α_m	0	1	2	⋯⋯	m	⋯⋯	n
0	0	1	2	⋯⋯	m	1	⋯⋯
1	1	1					
2	2						
⋮	⋮						
m	m				1		
⋮	1						
⋮	⋮						
n	⋮						

M_{m-1}	0	1	2	⋯⋯	m	⋯⋯	n
0	0	0	1	2	⋯	$m-1$	0 ⋯⋯
1	0	0					
2	1						
⋮	2						
m	$m-1$				0		
⋮	0						
⋮	⋮						
n	⋮						

N_{m-1}	0	1	2	⋯⋯	m	⋯⋯	n
0	1	0	1	2	⋯	$m-1$	0 ⋯⋯
1	0	0					
2	1						
⋮	2						
m	$m-1$				0		
⋮	0						
⋮	⋮						
n	⋮						

$$\alpha_{m+1}(x, y) = \delta(N_m, g_1(M_m))$$

$$M_m = \alpha_m\left(M_{m-1}, \alpha_m\left(R^m_{0,m+1}, R^m_{m+1,0}\right)\right)$$

$$N_m = \alpha_m(M_m, N_0)$$

証明

$\alpha_m(R^m_{0,m+1}, R^m_{m+1,0})$

	0	1	2	-------	$m+1$	------	n
0					m		
1							
2							
⋮							
$m+1$	m						
⋮							
n							

0

M_m	0	1	2	-----	$m+1$	------	n
0	0	0	1	2	---- m	0	------
1	0						
2	1						
⋮	2						
$m+1$	m						
⋮	0						
n	⋮						

0

N_m	0	1	2	3	-----	$m+1$	--------	n
0	1	0	1	2	----- m	0	-------	
1	0							
2	1							
3	2							
⋮	⋮							
$m+1$	m							
⋮	0							
n	⋮							

0

$g_1(M_m)$	0	1	2	3	-----	$m+1$	------	n
0	1	1	2	3	-----	$m+1$	1	------
1	1							
2	2							
3	3							
⋮	⋮							
$m+1$	$m+1$							
⋮	1							
n	⋮							

1

α_{m+1}	0	1	2	3	-----	$m+1$	-------	n
0	0	1	2	3	-----	$m+1$	1	-------
1	1							
2	2							
3	3							
⋮	⋮							
$m+1$	$m+1$							
⋮	1							
n	⋮							

1

故ニ数學的帰納法ニヨッテ $\alpha_i(x, y)$ $(i=3, 4, \cdots\cdots, n)$ ヲ定

メル表ヲ知ルコトが出來 $i=n$ トスレバ α_n ノ表が求メラレル。

サテ同ジ領域ガ任意ニ與ヘラレタ函數 $f(x,y)$ が次ノ表ニヨッテ定義サレテヰルトキ

$\longrightarrow y$

$f(x,y)$	0	1	2	----------	n
0	$t_{0,0}$	$t_{0,1}$	$t_{0,2}$	----------	$t_{0,n}$
1	$t_{1,0}$	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	----------	$t_{1,n}$
2	$t_{2,0}$	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	----------	$t_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	$t_{n,0}$	$t_{n,1}$	$t_{n,2}$	----------	$t_{n,n}$

x ↓

$$f(x,y)=R_{0,0}^{t_{0,0}}+R_{0,1}^{t_{0,1}}+R_{0,2}^{t_{0,2}}+\cdots\cdots+R_{0,n}^{t_{0,n}}$$

$$+R_{1,0}^{t_{1,0}}+R_{1,1}^{t_{1,1}}+R_{1,2}^{t_{1,2}}+\cdots\cdots+R_{1,n}^{t_{1,n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+R_{n,0}^{t_{n,0}}+R_{n,1}^{t_{n,1}}+R_{n,2}^{t_{n,2}}+\cdots\cdots+R_{n,n}^{t_{n,n}}$$

トナリ $f(x,y)$ ハ $\alpha_n(x,y)$ ト $R_{0,0}^{t_{0,0}}, R_{0,1}^{t_{0,1}}, \cdots\cdots\cdots$ 等ヨッテ表ハシ得ル。即チ $f(x,y)$ ハ $g(x,y)$ ヲ有限回 *iterieren* スルコトニヨッテ表ハシ得ル。

次ニ第62号228ニ於テ定義シタ函數

$\psi_1(x, y)$　　$\psi_2(x, y)$

$f_k(x) \equiv k$　　$(k = 0, 1, \cdots\cdots, n)$

$\sigma(x, \lambda)$　　$(\lambda = 0, 1, \cdots\cdots, n)$

ハ總テ $\varphi(x, y)$ ヲ有限回 itierieren スルコトニヨッテ表ハサレ得ル。

（証明）　二変数函數 $\psi_1(x, y)$ ガ $\varphi(x, y)$ ニヨッテ表ハサレルコトハ既ニ証明シタ。$\psi_2(x, y) = \alpha_n(x, y)$。

$f_0(x) = \varphi(x, g(x))$,　$f_k(x) = g(f_{k-1}(x))$,　$(k = 1, \cdots\cdots, n)$。

$\sigma(x, \lambda) = \varphi(f_0(x), g_{-\lambda}(x))$,　$(\lambda = 0, 1, \cdots\cdots, n)$

故ニ第62号228ノ定理ニヨッテ任意ノ函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ガ $\varphi(x, y)$ ヲ何回カ itierieren スルコトニヨッテ表ハサレ得ルコトガ証明出來タ。