



Title	有限個領域ニ於ケル函数ノErzeugungニ就イテ
Author(s)	伊藤, 誠; 内藤, 實
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 85, p. 1-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74302
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

377. 有限個領域 = 於ケル函数 /

Erzeugung = 就イテ

伊藤誠, 中澤實 (御影師範)

角谷氏が第62号 229 = 於イテ 変域 $\in$ 値域 $\in$ 有限個領域 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ デアル任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ が或ルーツノ二変数ノ函数ヲ何回カ *iterieren* スルコト = ヨリ *erzeugen* サレ得ルコトヲ証明サレタ。其ノ後、既 = 1935年5月 / *Am. National Acad. of Science* 上デ米國ノ *Webb* がソレト異ナル函数 = ヨツテ同様ノコトヲ論ジテキルヲ見タ。然シ其ノ論文ハ、記号ソノ他ノ点デ多少理解シ難イ感ジガスルノデ其等ヲ書き改ヘテ、次 = 御紹介シタイト思フ。

次ノ表 = ヨツテ定義サレル函数ヲ $\varphi(x, y)$ トス。(空白ノ部分、数字ハ0トス)

→ y

	φ	0	1	2	---	---	$n-1$	n
↓ x	0	1	0	---	---	---	---	---
	1	0	2	0	---	---	---	---
	2	:	0	3	↘			
	⋮	⋮	⋮	0	↘			
	⋮	⋮	⋮	⋮	0	↘	0	
	$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	0	n	0
	n	0	⋮	⋮	⋮	⋮	0	0

$g_1(x) = \varphi(x, x) \equiv x+1 \pmod{V=n+1}$ であるから
 $g_1(x)$ を iterieren すれば $\exists$ $g_k(x) = x+k$ へ
 $\varphi(x, y) = \exists$ ヲ φ erzeugen される。又 $g_{n-k}(x) = g_{-k}(x)$
 となる。

函数 $R_{\lambda, \mu}^i(x, y)$ を次の如く定義し、 $R_{\lambda, \mu}^i$ を略記
 する。

$$R_{\lambda, \mu}^i(x, y) = i, \quad x = \lambda, \quad y = \mu + \text{ルトキ}$$

$$R_{\lambda, \mu}^i(x, y) = 0, \quad x \neq \lambda \text{ 或 } y \neq \mu + \text{ルトキ}$$

然らば

$$R_{\lambda, \mu}^0 = \varphi(x, g_1(x)) = 0$$

$$R_{\lambda, \mu}' = \varphi\{g_{-1}[\varphi(g_{-\lambda}(x), g_{-\mu}(y))], \varphi(x, g_1(x))\}$$

何故ならば

$$\text{右辺} = \varphi\{g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)], 0\}$$

$$x = \lambda, \quad y = \mu \quad \text{ルトキ} \quad g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)] = g_{-1}(\varphi(0, 0)) = 0$$

$$\therefore \text{右辺} = \varphi\{0, 0\} = 1$$

$$x \neq \lambda \text{ 或 } y \neq \mu \quad \text{ルトキ} \quad \varphi(x-\lambda, y-\mu) \neq 1 \quad \text{トナリ}$$

$$g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)] \neq 0$$

$$\therefore \text{右辺} = 0$$

次に

$$R_{\lambda, \mu}^i = \varphi\{g_{i-2}(R_{\lambda, \mu}'), g_{i-1}(R_{\lambda, \mu}^0)\}$$

何故ならば

$$\text{右辺} = \varphi\{g_{i-2}(R_{\lambda, \mu}'), i-1\}$$

$$x=\lambda, y=\mu + \text{ル} \neq \text{右辺} = \mathcal{P}\{g_{i-2}(0), i-1\} = i$$

$$x \neq \lambda \text{ or } y \neq \mu + \text{ル} \neq R'_{\lambda, \mu} \neq / \text{トナリ}$$

$$g_{i-2}(R'_{\lambda, \mu}) \neq i-1$$

$$\therefore \text{右辺} = 0$$

故 = $R_{\lambda, \mu}^i$, ($i=0, 1, 2, \dots, n$)、 $\mathcal{P}(x, y)$ 有限回
iterieren スルコト = ヨツテ erzeugen スルコトが
来ル。

$$\delta(x, y) = \mathcal{P}(x, g_n(y))$$

$$\alpha_i(x, y) = \delta(N_{i-1}, g_i(M_{i-1}))$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$$M_0 = R_{0,0}^0, \quad M_k = \alpha_k(M_{k-1}, \alpha_k(R_{0,k+1}^k, R_{k+1,0}^k))$$

$$N_0 = R'_{0,0}, \quad N_k = \alpha_k(M_k, N_0)$$

ト定義スレバ, $\delta(x, y)$ 、次ノ表ヲ與ヘラレル。

		→ y					
	$\delta(x, y)$	0	1	2	-----	n-1	n
↓ x	0		1	0			
	1		0	2	\		
	2						
	⋮					0	
						n-1	0
	n-1						n
	n	0	0				

次 = 函数 $\alpha_n(x, y)$ が次ノ表 = ヨツテ表ハサレルコトヲ
証明シヨウ。

		$\longrightarrow y$			
	α_n	0	1	2	----- n
$\downarrow x$	0	0	1	2	----- n
	1	1	1	1	
	2	2	1		
	$\vdots$	$\vdots$			
	n	n			

1

即チ
 $x=0$ 或 $y=0$
 ナルトキ
 $\alpha_n(x, y) = x + y$

(証明) $i = 1$ ナルトキ

$$\alpha_1(x, y) = \mathcal{J}(N_0, g, (M_0))$$

$$M_0 = R_{0,0}^0 \quad N_0 = R_{0,0}^1$$

ヨリ

		$\longrightarrow y$			
	α_1	0	1	2	----- n
$\downarrow x$	0	0	1	1	----- 1
	1	1	1	1	
	2	1	1	1	
	$\vdots$	$\vdots$			
	n	1			

1

$$i = 2 + \text{ル} \neq$$

$$\alpha_2(x, y) = \delta(N_1, g_1(M_1)),$$

$$M_0 = R_{0,0}^0 \quad M_1 = \alpha_1(M_0, \alpha_1(R'_{0,2}, R'_{2,0}))$$

$$N_0 = R'_{0,0} \quad N_1 = \alpha_1(M_1, N_0)$$

$\longrightarrow y$

M_1	0	1	2	-----	n
0	0	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
$\vdots$	0		0		
$\vdots$					
n					

$\downarrow x$

$\longrightarrow y$

N_1	0	1	2	-----	n
0	1	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
$\vdots$	0			0	
$\vdots$					
n					

$\downarrow x$

$\longrightarrow y$

$g_1(M_1)$	0	1	2	-----	n
0	1	1	2	1	
1	1	1			
2	2			1	
$\vdots$	1				
$\vdots$					
n					

$\downarrow x$

$\longrightarrow y$

α_2	0	1	2	-----	n
0	0	1	2	1	
1	1	1			
2	2			1	
$\vdots$	1				
$\vdots$					
n					

$\downarrow x$

$i = m + \text{ル} \neq \alpha_m(x, y), M_{m-1}, N_{m-1}$ が夫々次表ノ
如ク表ハサレルト假定スレバ

α_m	0	1	2	-----	m	-----	n
0	0	1	2	-----	m	1	-----
1	1	1					
2	2						
$\vdots$	$\vdots$						
m	m				1		
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
n	$\vdots$						

M_{m-1}	0	1	2	-----	m	-----	n
0	0	0	1	2	-----	$m-1$	0
1	0	0					
2	1						
$\vdots$	$\vdots$						
m	$m-1$				0		
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
n	$\vdots$						

N_{m-1}	0	1	2	-----	m	-----	n
0	1	0	1	2	-----	$m-1$	0
1	0	0					
2	1						
$\vdots$	$\vdots$						
m	$m-1$				0		
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
$\vdots$	$\vdots$						
n	$\vdots$						

$$\alpha_{m+1}(x, y) = \delta(N_m, g, (M_m))$$

$$M_m = \alpha_m(M_{m-1}, \alpha_m(R_{0, m+1}^m, R_{m+1, 0}^m))$$

$$N_m = \alpha_m(M_m, N_0)$$

$\exists ! j$

$$\alpha_m(R_{0,m+1}^m, R_{m+1,0}^m)$$

	0	1	2	-----	m+1	-----	n
0						m	
1							
2							
⋮							
m+1	m				0		
⋮							
n							

M_m	0	1	2	-----	m+1	-----	n
0	0	0	1	2	-----	m	0
1	0						
2	1						
⋮	2					0	
m+1	m						
⋮	0						
n	⋮						

N_m	0	1	2	3	-----	m+1	-----	n
0	1	0	1	2	-----	m	0	-----
1	0							
2	1							
3	2							
⋮	⋮					0		
m+1	m							
⋮	0							
n	⋮							

$g(M_m)$	0	1	2	3	-----	m+1	-----	n
0	1	1	2	3	-----	m+1	1	-----
1	1							
2	2							
3	3						1	
⋮	⋮							
m+1	m+1							
⋮	1							
n	⋮							

d_{m+1}	0	1	2	3	-----	m+1	-----	n
0	0	1	2	3	-----	m+1	1	-----
1	1							
2	2							
3	3							
⋮	⋮					1		
m+1	m+1							
⋮	1							
n	⋮							

故 = 數學的歸納法 = $\exists$ ツテ $\alpha_i(x, y)$ ($i=3, 4, \dots, n$) $\neq$ 定

メル表ヲ知ルコトが出来 $i=n$ トスレバ α_n 表ガ求メラレル。

サテ同シ領域ガ任意ニ與ヘラレタ函数 $f(x, y)$ ガ次ノ表ニヨツテ定義サレテキルトキ

		$\longrightarrow y$				
	$f(x, y)$	0	1	2	-----	n
$\downarrow x$	0	$t_{0,0}$	$t_{0,1}$	$t_{0,2}$	-----	$t_{0,n}$
	1	$t_{1,0}$	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	-----	$t_{1,n}$
	2	$t_{2,0}$	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	-----	$t_{2,n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	n	$t_{n,0}$	$t_{n,1}$	$t_{n,2}$	-----	$t_{n,n}$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & R_{0,0}^{t_{0,0}} + R_{0,1}^{t_{0,1}} + R_{0,2}^{t_{0,2}} + \text{-----} + R_{0,n}^{t_{0,n}} \\
 & + R_{1,0}^{t_{1,0}} + R_{1,1}^{t_{1,1}} + R_{1,2}^{t_{1,2}} + \text{-----} + R_{1,n}^{t_{1,n}} \\
 & \text{-----} \\
 & + R_{n,0}^{t_{n,0}} + R_{n,1}^{t_{n,1}} + R_{n,2}^{t_{n,2}} + \text{-----} + R_{n,n}^{t_{n,n}}
 \end{aligned}$$

トナリ $f(x, y)$ ハ $\alpha_n(x, y)$ ト $R_{0,0}^{t_{0,0}}, R_{0,1}^{t_{0,1}}, \text{-----}$ 等 =

ヨツテ表ハシ得ル。即チ $f(x, y)$ ハ $\varphi(x, y)$ ヲ有限回

iterieren スルコトニヨツテ表ハシ得ル。

次=第62号228=於テ定義シタ函数

$$\psi_1(x, y) \quad \psi_2(x, y)$$

$$f_k(x) \equiv k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

$$\sigma(x, \lambda) \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

ハ總テ $\varphi(x, y)$ ヲ有限回 *iterieren* スルコト=ヨツテ表
ハサレ得ル。

(証明) =変数函数 $\psi_1(x, y)$ が $\varphi(x, y) = \text{ヨツテ表}$
ハサレルコトハ既ニ証明シタ。 $\psi_2(x, y) = \alpha_n(x, y)$ 。

$$f_0(x) = \varphi(x, g_0(x)), \quad f_k(x) = g(f_{k-1}(x)), \quad (k=1, \dots, n)$$

$$\sigma(x, \lambda) = \varphi(f_0(x), g_{-\lambda}(x)), \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

故=第62号228ノ定理=ヨツテ任意ノ函数

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が $\varphi(x, y)$ ヲ何回カ *iterieren* ス
ルコト=ヨツテ表ハサレ得ルコトが証明出来タ。