OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	locally compact ナ topological group ノ 連續表現
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 87, p. 1-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74308
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

383. locally compact + topological group ノ連続表現

吉田耕作（阪大）

$\overline{\mathfrak{G}}$（其ノ element ヲ a, b, c, ……デ表ハス）ヲ locally compact 且ツ connected + topological group トシ之レヲ距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{G}$ デ stetig isomorph ニ表現スル。

isomorphism ヲ $a \longleftrightarrow D(a)$ トスルト $D(a)$ ハ a ノ連続函数デアル。

然ラバ

定理1. $\mathfrak{G}$ ガ有限次元ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ次ノ意味デ Lie 群デアル。コノコトヲ $\mathfrak{G}$ ガ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ Lie 表現デアルト呼バウ。

R = real number ヲ係数トシテ一次独立ナ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$ ガアッテ之ノ real number ニヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスレバ

- a ガ充分 e ニ近イト $D(a) = \exp. U_a$, $U_a \in \mathfrak{T}$,
- $U \in \mathfrak{T}$ ナラバ $\exp. U \in \mathfrak{G}$,
- $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ element ハ $\exp. U$ ノ如キモノ有限個ノ composition トシテ表ハサレル。

定理1カラ

定理2. $\mathfrak{G}$ ガ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ stetig homomorph ナ表現ニナッテヲルトスル。即チ $D(a)$ ガ a ノ連続函数ニシテ

$D(a)D(b)=D(ab)$, $D(e)=E$; e, E ハ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}, \mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ単位.
然ラバ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ハ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ ノ Lie 表現デアル。

証明. $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ハ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ ノ或ル閉ダタ Normalteiler $\overline{N}$ ニヨル剰余群 $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ = isomorph デアル。$\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ ノ topology ヲ, Restklassenbildung ニ於イテ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ ノ open set ノ Bild ニナルヤウナモノ、然シテ斯ルモノノミヲ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ ノ open set ト名ヅケルコトニスルト明ニ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ ハ locally compact 且ツ connected + topological group ニナル。且ツ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ハ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ = stetig isomorph ニナル。何者, $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ open set ノ Urbild in $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}/\overline{N}$ ハ定義カラ open ニナルカラ。ヨッテ定理1ヲ使ヘバヨイ。

注意. 定理2ハ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}, \mathfrak{o}\mathfrak{f}$ 共ニ matrix 群ノトキニハ J. von Neumann (M.Z.) ニヨリ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ ガ Lie 群 $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ガ matrix 群ノトキニハ van der waerden (M.Z. 36) ニヨリ、又 $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ ガ real number ノ additive group ノトキニハ南雲氏ニヨリ $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ノ次元假定ナシニ証明サレタ (本紙談話203)。

定理1ノ証明. 第一段. $\mathfrak{o}\mathfrak{f}$ ハ R ニ einbetten シテルカラ arbitrarily small cyclic sub group ヲ含マナイ (本紙談話298)、從ッテ $\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{f}}$ モ亦 arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マナイ。今 $V(e)$ ヲバ $V(e)=V(e)^{-1}$ ($V(e)$ ノアラユル要素ノ inverse

ヲ $\nabla(e)^{-1}$ デ表ハス), $\nabla(e)$ ノ closure $\overline{\nabla}(e)$ が compact ナ様ナ e ノ近傍トスル。然モ $\overline{\nabla}(e)$ ノ Bild ハ全テ $|D-E|<1$ テ満足スルヤウニ $\nabla(e)$ ヲ小サクトッテオク。

今 $\nabla_1(e)=\nabla_1(e)^{-1}$, $\nabla_1(e)^2 \subseteqq \nabla(e)$ ナル如キ e ノ近傍ヲトル。$\overline{\mathfrak{o}}$ ハ arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マヌカラ $a_n \in \overline{\mathfrak{o}}$, $a_n \neq e$, $a_n \longrightarrow e$ トスルト $a_n^p \in \overline{\nabla}_1(e)$; $p=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm(m_n-1)$ = シテ $a_n^{m_n} \in \overline{\nabla}_1(e)$, $a_n^{\pm m_n} \in \nabla(e)$ ナル如キ positive integer m_n ノ Folge アリ。ヨッテ $\overline{\nabla}(e)$ compact ダカラ $a_{n_i}^{m_{n_i}} \longrightarrow a \neq e$ ($\overline{\nabla}_1(e)$ ニ含マレヌカラ), $a \in \overline{\nabla}(e)$ ナル如キ Teilfolge $a_{n_i}^{m_{n_i}}$ アリ。

第二段. 上ノ如キ a ヲ含ム one-parameter ノ subgroup of $\overline{\mathfrak{o}}$ アリ。以下其ノ証明.

$2p_i-1 < m_{n_i} \leqq 2p_i$ ナル如キ正 integer p_i ヲ定メルト $a_{n_i}^{p_i}$ ハ convergent デアル。若シ然ラストスレバ $\lim a_{n_i'}^{p_i'} = a' \neq a'' = \lim a_{n_i''}^{p_i''}$ ナル如キ二ツノ Teilfolge アリ。$a', a'', a'^2, a'' \in \overline{\nabla}(e)$ 且ツ $a' \neq a''$, $a'^2 = a''^2$ ダカラ $D(a') \neq D(a'')$, $D(a')^2 = D(a'')^2$。log ヲトルト $2\log D(a') = 2\log D(a'')$ ヨッテ $D(a') = D(a'')$ トナッテ矛盾デアル。ヨッテ $a_{n_i}^{p_i}$ ハ convergent デアルカラ此ノ limes ヲ $a^{\frac{1}{2}}$ トヲクト $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$. 同様ニシテ順次 $a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, \cdots\cdots, a^{\frac{1}{2^n}}$ ガ定義サレ明カ

$= \left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^m} = a^{\frac{1}{2^{n-m}}}$, $m \leqq n$ デアル。 $a^{\frac{1}{2^0}} = a$.

又 $a^{\frac{1}{2^n}} \longrightarrow e$ デアル。何者、然ラズンバ或ル Teilfolge

$a^{\frac{1}{2^{n_i}}}$ ハ $a^{\frac{1}{2^{n_i}}} \longrightarrow d \neq e$, $a^{\frac{m}{2^{n_i}}} \in \overline{\nabla}(e)$, $m \leqq 2^{n_i}$,

ヲ満足スルカラ $D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}) \longrightarrow D(d) \neq E$, $\left|D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})^m - E\right| < 1$;

$m = 0, 1, \cdots\cdots, 2^{n_i}$, 且ツ $D\left(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\right)^{2^{n_i}} = D(a) \longrightarrow D(d)$ ヲ満足

スルカラ log ヲトッテ $2^{n_i} \log D\left(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\right) \longrightarrow \log D(d) \neq 0$

($a \neq e$ ダカラ)。之レカラ $\log D\left(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}\right) \longrightarrow 0$. 即チ

$\log D(d) = 0$ ナル矛盾ヲ得ルカラデアル。ヨッテ

$a^{\frac{1}{2^n}} \longrightarrow l$ トオクト $l^2 = l$. 従ッテ $l = e$.

斯クテ $a^{\frac{m}{2^n}}$ ガ定義サレ明カニ

$$a^{\frac{m}{2^n}} a^{\frac{m'}{2^{n'}}} = a^{\frac{2^{n'}m}{2^{n+n'}}} a^{\frac{2^n m'}{2^{n+n'}}} = a^{\frac{2^{n'}m + 2^n m'}{2^{n+n'}}}$$

ガ成立スルカラ continuity ニヨリ a ヲ含ム one-parameter subgroup ノ存在ガワカル。

$$\begin{cases} a(t)\,a(s) = a(t+s),\ a(1) = a,\ a(0) = e \\ \lim\limits_{t \to t} a(t) = a(t_0) \end{cases}$$

第三段. $D(a(t)) = D_t$ トオクト $D_t D_s = D_{t+s}$ 且ツ $\lim\limits_{t \to t_0} D_t = D_{t_0}$ ヨッテ南雲氏ノ定理ニヨリ $D_t = \exp tU$, $U \in R$. U ハ次ノ式ヲ満足スル。

$$D(a_{n_i})^{m_{n_i}} = D\left(a_{n_i}^{m_{n_i}}\right) \longrightarrow D(a) = D_1 = \exp U.$$

ヨッテ $m_{n_i}\log D(a_{n_i})\to U$ 即チ $m_{n_i}\{D(a_{n_i})-E\}\to U$ ($m_{n_i}\log D(a_{n_i})$ ト $m_{n_i}[D(a_{n_i})-E]$ トハ同時ニ収斂シ其ノ limit 等シイ。本紙談話280参照）尚一般ニ

$$a\left(\frac{t}{n}\right)^n\to a(t),\quad n\left\{D\left(a\left(\frac{t}{n}\right)\right)-E\right\}\to tU,$$
$$|t|\leqq 1.$$

第四段. $a(t)$ ノ他ニ $b(t)\in\overline{\mathfrak{o}}$ ノ one-parameter subgroup トシ $b(t)\in\overline{\mathfrak{V}}(e)$ for $|t|\leqq 1$ トス。$D(b(t))=\exp t\mathfrak{V}$ トヲク。

今 $a\left(\frac{1}{n}\right)b\left(\frac{1}{n}\right)=C_n$ トヲイテ

$$C_n^m\in\overline{\mathfrak{V}}(e);\ m=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm m_n;\ m_n\leqq n;$$
$$C_n^{m_n+1}\in\mathfrak{V}(e)$$

ナル如キ正整数 m_n ヲ定メル（但シ $C_n^m\in\overline{\mathfrak{V}}(e);\ m=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm n$ ナラバ $m_n=n$ トヲク）。然ラバ $C_n^{m_n}\in\overline{\mathfrak{V}_1}(e)$ デアル。何者、若シ然ラズンバ $\mathfrak{V}_1(e)^2\subset\mathfrak{V}(e)$ ニヨリ $C_n^{m_n+1}\in\mathfrak{V}(e)$ トナッテ了フ。ヨッテ $C_n^{m_n}$ ノ Teilfolge $C_{n_i}^{m_{n_i}}\to d\neq e$. $D(C_{n_i})^{m_{n_i}}\to D(d)\neq E$. 上ト同様ニシテ

$$m_{n_i}\left\{D(C_{n_i})^{m_{n_i}}-E\right\}\to\log D(d).$$

即チ

$$m_{n_i}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)D\left(b\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)-E\right\}=m_{n_i}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)-E\right.$$
$$\left.+D\left(b\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)-E+\left[D\left(a\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)-E\right]\left[D\left(b\left(\frac{1}{n_i}\right)\right)-E\right]\right\}\to\log D(d).$$

所ガ $0\leqq m_{n_i}\leqq n_i$ ダカラ適當ナ Teilfolge ヲトルト

$\lim\frac{m_{n'_i}}{n'_i}\to t_0\leqq 1$. 故ニ

$$\lim_{i'\to\infty} m_{n_{i'}}\left\{D\left(a\left(\frac{1}{a_{i'}}\right)\right)-E\right\}=\lim_{i'\to\infty} m_{n_{i'}}\log D\left(a\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)$$

$$=\lim_{i'\to\infty}\log D\left(a\left(\frac{m_{n_{i'}}}{n_{i'}}\right)\right)=\log D(a(t_0))=t_0 U.$$

ヨッテ $m_{n_{i'}}\log D(C_{n_{i'}})\to t_0(U+V)$

即チ $D(d)=\exp(t_2(U+V))$。

然シテ $d\neq e$ ダカラ $D(d)\neq E$ ダカラ $t_0\neq 0$. 斯クテ

第五段. $a_i\in\overline{\mathfrak{o}_f}$, $a_i\neq e$, $a_i\to e$ ナル如キ Folge $\{a_i\}$ ヲ取ヘレバ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ノ one-parameter subgroup $a(t)$ 及ビ $\mathfrak{o}_f$ ノ one-parameter subgroup $D(a(t))=\exp tU$ ガ定マル。斯ルUヲ $\mathfrak{o}_f$ ノ infinitesimal operator ト名ヅケルト斯ルU ノ全体ハ real number ヲ係数トスル linear manifold $\mathfrak{T}$ ヲ作リ $\exp V\in\mathfrak{o}_f$, $V\in\mathfrak{T}$, 且ツ V ガ充分0ニ近イトキ $D(a)=\exp V$ ナル $a\in\overline{\mathfrak{o}_f}$ ハ e ニ近イコトガ分ッタ。

第六段. $\mathfrak{o}_f$ ノ有限次元ト云フ假定カラ $\mathfrak{T}$ ハ有限コノ一次独立（real number ヲ係数トシテ）ナ Base $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$ ヲモツコトガワカルガ $a\in\overline{\mathfrak{o}_f}$ ガ充分 e ニ近イナラバ $D(a)=\exp U$, $U\in\mathfrak{T}$ デアル。ソレニハ本紙談話291ノ論法ヲ使ヘバヨイ。即チ

$\mathfrak{T}'$ ヲ $\mathfrak{T}$ ノ element デ $|U|\leqq\alpha<1$ ヲ満足スルモノトシ $\mathfrak{o}_f'$ ヲ $\exp U$, $U\in\mathfrak{T}'$ ノ全体トスル。$\mathfrak{o}_f'$ ハ群デハナイガ任意ノ element ト共ニ確カニソノ inverse ヲ含ム Gruppenkeime デアル。

今 $a_i \in \overline{\mathfrak{o}_f}$, $a_i \to e$ トスレバ充分大キナ i ニ對シ $D(a_i) \in \mathfrak{o}_f'$ デアル。若シ然ラズトスレバ $\mathfrak{o}_f'$ が $\mathfrak{o}_f$ ニ於テ閉ヂテヲルカラ,各 i ニ對シ

$$0 < \eta_i = |D(a_i)T_i - E| \leqq |D(a_i)T - E|;\ T_i, T \in \mathfrak{o}_f'$$

ナル如キ η_i, T_i が存在セネバナラヌ。然シテ $E \in \mathfrak{o}_f'$ ダカラ $D(a_i) \to E$ ニヨリ $\eta_i \to 0$ 從ッテ $T_i \to E$ デアル。故ニ $T_i = D(b_i)$ トヲケバ $b_i \to e$ 從ッテ $D(a_i)T_i = D(a_i b_i)$ ニ於ケル $a_i b_i \to e$ 且ツ $a_i b_i \neq e$. ヨッテ第二段ノ論法ニヨリ或 Teilfolge ニ對シ

$$(a_{i'} b_{i'})^{n_{i'}} \to d \neq e,$$

$$n_{i'}\{D(a_{i'} b_{i'}) - E\} \to \log D(d) \neq 0.$$

從ッテ特ニ $n_{i'} \eta_{i'} \to \beta \neq 0$

今 $D(b_i) = \exp U_i$, $U_i \in \mathfrak{T}$ トヲクト $U_i \to 0$ デアル。

$$|D(a_{i'}) \exp\left(U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - E| \leqq |D(a_{i'})|$$

$$\left|\exp\left(U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - \exp(U_{i'}) \exp\left(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right)\right|$$

$$+ |D(a_{i'}) \exp U_{i'} \exp\left(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) - E|$$

ニ於ケル右辺ノ第一項ハ

$$|D(a_{i'})|\, O\left(|U_{i'}| \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)\right) = o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right) = o(\eta_{i'})$$

(何者、$U_{i'} \to 0$ ニシテ且ツ一般ニ $|\exp(A+B) - \exp A \exp B| = O(|A||B|)$ デアルカラ)

第二項ハ

$$\left|\left(E+\frac{1}{n_{i'}}\log D(a)+o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)\left(E-\frac{1}{n_{i'}}\log D(a)+o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)\right)\right|$$
$$=o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right)=o(\eta_{i'}).$$

ヨッテ $\left|D(a_{i'})\exp\left(U_{i'}-\frac{1}{n_{i'}}\log D(a)\right)-E\right|=o(\eta_{i'})$ デアル。所ガ $U_{i'}$, $\frac{1}{n_{i'}}\log D(a)$ ハ $\mathfrak{J}$, element デ且ツ i' ガ充分大キイト明ニ $\left|U_{i'}-\frac{1}{n_{i'}}\log D(a)\right|\leqq\alpha$ ダカラ $T_{i'}$ ノ撰ミ方ニ矛盾スル。ヨッテ i ガ充分大キイト $D(a_i)\in\mathfrak{o}_f'$ ナル可シ。

第七段。 定理ノ最後ノ部分ハ Schrier ノ定理ニヨリ連結ナ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ノ任意ノ element ハソノ任意ノ e ノ近傍ノ element 有限コノ composition トシテ得ラレルコトカラワカル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番

(尚前期會費未納ノ方ハ前期會費ヲモ至急御拂込ミ願ヒマス。)

前期會計決算ハ第8年號ニ報告シテアリマス。