



Title	locally compact τ topological group χ 連続表現
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 87, p. 1-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74308
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

383. locally compact + topological group, 連続表現

吉田耕作 (阪大)

$\overline{G}$ (其, element $\rightarrow a, b, c, \dots$ を表ハス) $\rightarrow$ locally compact 且つ connected + topological group トシ之レヲ距離付ケラレタ環 $R =$ 横ハル群 G $\rightarrow$ stetig isomorph = 表現スル。

isomorphism $\rightarrow a \leftrightarrow D(a)$ トスル $D(a)$ ハ a ノ連続函数デアイル。

然ラバ

定理1. G が有限次元+ラバ G ハ 次ノ意味デ Lie 群デアイル。コノコトヲ G が $\overline{G}$, Lie 表現 デアルト呼バシ。

$R =$ real number $\rightarrow$ 係数トシテ一次独立ナ $U_1, U_2, \dots, U_k$ ガアツテ之ノ real number = ヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathcal{T}$ トスレバ

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ が充分小} \Rightarrow \text{近イト } D(a) = \exp. U_a, U_a \in \mathcal{T}, \\ U \in \mathcal{T} \rightarrow \text{ラバ } \exp. U \in G, \\ G \text{ ノ任意ノ element ハ } \exp. U \text{ ノ如キモノ有限個ノ} \\ \text{composition トシテ表ハサレル。} \end{array} \right.$$

定理1カラ

定理2. G が $\overline{G}$, stetig homomorph + 表現 = ナツテアルトスル。即チ $D(a)$ が a ノ連続函数 = シテ

$D(a)D(b) = D(ab)$, $D(e) = E$; $e, E \in \overline{G}$, G の単位。
然らば G の $\overline{G}$ の Lie 表現 デアル。

証明. G の $\overline{G}$ の、或る閉かつ *Normalteiler* N
= ヨル剰余群 $\overline{G}/N = \text{isomorph}$ デアル。 $\overline{G}/N$ の *topology* τ , *Restklassenbildung* = 於いて $\overline{G}$ の *open set* の *Bild* = ナルモノナモノ、然して斯ルモノノミヲ
 $\overline{G}/N$ の *open set* ト名ヅケルコト = スルト明 = $\overline{G}/N$ の
locally compact 且つ *connected + topological group* = ナル。且つ G の $\overline{G}/N = \text{stetig isomorph}$ = ナル。何者、 G の *open set* の *Urbild*
in $\overline{G}/N$ の定義カラ *open* = ナルカラ。ヨツテ定理1ヲ
使へバヨイ。

注意. 定理2の $\overline{G}$, G 共 = *matrix 群* のトキ = ハ
J. von Neumann (M. Z.) = ヨリ $\overline{G}$ が *Lie 群* の
matrix 群 のトキ = ハ van der waerden (M. Z. 36)
= ヨリ、又 $\overline{G}$ が *real number, additive group*
のトキ = ハ南雲氏 = ヨリ G の 次元假定 ナシ = 証明サレタ
(本紙談話 203)。

定理1の証明. 第一段. G の $R = \text{einbetten}$ して
ルカラ *arbitrarily small cyclic sub group*
ヲ含マナイ (本紙談話 298). 従つて $\overline{G} \in R$ *arbitrarily small cyclic sub group* ヲ含マナイ。今 $\nabla(e)$ τ
バ $\nabla(e) = \nabla(e)^{-1}$ ($\nabla(e)$ の τ ヲユル要素, *inverse*

$\nabla(e)^{-1}$ で表はす), $\nabla(e)$, closure $\overline{\nabla}(e)$ が compact + 様 + e の近傍トスル。然 $\in \overline{\nabla}(e)$ の Bild ハ全 ∇ $|D-E| < 1$ ヲ満足スル $x \in \nabla(e)$ ヲ小サクトツテオ
 7。

今 $\nabla_1(e) = \nabla_1(e)^{-1}$, $\nabla_1(e)^2 \subseteq \nabla(e)$ + ル如キ e ,
 近傍ヲトル。 $\overline{\sigma}$ ハ arbitrarily small cyclic sub-
 group ヲ含マヌカラ $a_n \in \overline{\sigma}$, $a_n \neq e$, $a_n \rightarrow e$ ト
 スルト $a_n^p \in \overline{\nabla}_1(e)$; $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(m_n-1) =$
 シテ $a_n^{m_n} \in \overline{\nabla}_1(e)$, $a_n^{\pm m_n} \in \nabla(e)$ + ル如キ positive
 integer m_n , Folge アリ。ヨツテ $\overline{\nabla}(e)$ com-
 pact 故カラ $a_{n_i}^{m_{n_i}} \rightarrow a \neq e$ ($\overline{\nabla}_1(e) =$ 含マレヌカラ),
 $a \in \overline{\nabla}(e)$ + ル如キ Teilfolge $a_{n_i}^{m_{n_i}}$ アリ。

第二段。上ノ如キ a ヲ含ム one-parameter
 , subgroup of $\overline{\sigma}$ アリ。以下其ノ証明。

$2p_i - 1 < m_{n_i} \leq 2p_i$ + ル如キ正 integer p_i ヲ
 定メルト $a_{n_i}^{p_i}$ ハ convergent デアル。若シ然ラズト
 スレバ $\lim a_{n_i}^{p_i} = a' \neq a'' = \lim a_{n_i}^{p_i}$ + ル如キニツノ
 Teilfolge アリ。 $a', a'', a'^2, a''^2 \in \overline{\nabla}(e)$ 且ツ $a' \neq a''$,
 $a'^2 = a''^2$ 故カラ $D(a') \neq D(a'')$, $D(a')^2 = D(a'')^2$ 。

$\log$ ヲトルト $2 \log D(a') = 2 \log D(a'')$ ヲツテ
 $D(a') = D(a'')$ トナツテ矛盾デアル。ヨツテ $a_{n_i}^{p_i}$ ハ con-
 vergent デアルカラ此ノ limes ヲ $a^{\frac{1}{2}}$ トヲクト $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$ 。
 同様ニシテ順次 $a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, \dots, a^{\frac{1}{2^n}}$ が定義サレ明カ

$$= \left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^m} = a^{\frac{1}{2^{n-m}}}, \quad m \leq n \text{ デアル。 } a^{\frac{1}{2^0}} = a.$$

又 $a^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow e$ デアル。何者、然ラズンバ或ル Teilfolge

$$a^{\frac{1}{2^{n_i}}} \text{ へ } a^{\frac{1}{2^{n_i}}} \rightarrow d \neq e, \quad a^{\frac{m}{2^{n_i}}} \in \overline{V}(e), \quad m \leq 2^{n_i},$$

$$\text{ヲ満足スルカヲ } D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}) \rightarrow D(d) \neq E, \quad |D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})^m - E| < 1;$$

$$m=0, 1, \dots, 2^{n_i}, \text{ 且ツ } D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}})^{2^{n_i}} = D(a) \rightarrow D(a) \text{ヲ満足}$$

$$\text{スルカヲ } \log \text{ ヲトツテ } 2^{n_i} \log D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}) \rightarrow \log D(a) \neq 0$$

$$(a \neq e \text{ デアル})。之レカヲ } \log D(a^{\frac{1}{2^{n_i}}}) \rightarrow 0. \text{ 即チ}$$

$$\log D(d) = 0 \text{ ナル矛盾ヲ得ルカラデアル。ヨツテ}$$

$$a^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow l \text{ トオクト } l^2 = l. \text{ 従ツテ } l = e.$$

斯クテ $a^{\frac{m}{2^n}}$ が定義サレ明カ =

$$a^{\frac{m}{2^n}} a^{\frac{m'}{2^{n'}}} = a^{\frac{2^{n'}m}{2^{n+n'}}} a^{\frac{2^n m'}{2^{n+n'}}} = a^{\frac{2^{n'}m + 2^n m'}{2^{n+n'}}}$$

が成立スルカラ continuity = ヨリ a ヲ含ム one-parameter subgroup, 存在ガマカル。

$$\begin{cases} a(t)a(s) = a(t+s), & a(1) = a, & a(0) = e \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = a(t_0) \end{cases}$$

第三段。 $D(a(t)) = D_t$ トオクト $D_t D_s = D_{t+s}$ 且ツ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} D_t = D_{t_0}. \text{ ヨツテ南雲氏ノ定理 = ヨリ } D_t = \exp t U,$$

$U \in R$. U ハ次ノ式ヲ満足スル。

$$D(a_{n_i})^{m_{n_i}} = D(a_{n_i}^{m_{n_i}}) \rightarrow D(a) = D_1 = \exp U.$$

$\exists \text{ して } m_{n_i} \log D(a_{n_i}) \rightarrow U$ 即ち $m_{n_i} \{D(a_{n_i}) - E\} \rightarrow U$
 $(m_{n_i} \log D(a_{n_i}) \text{ と } m_{n_i} [D(a_{n_i}) - E] \text{ と 同時 = 収斂}$
 $\text{シ其, limit 等シイ。本紙談話 280 参照})$ 尚一般 =
 $a\left(\frac{t}{n}\right)^n \rightarrow a(t), \quad n \{D(a\left(\frac{t}{n}\right)) - E\} \rightarrow tU,$
 $|t| \leq 1.$

第四段. $a(t), \text{ 他 } = b(t) \in \overline{G}$, one-parameter
 subgroup トシ $b(t) \in \overline{V}(e)$ for $|t| \leq 1$ トス。

$D(b(t)) = \exp tV$ トヲク。

今 $a\left(\frac{1}{n}\right) b\left(\frac{1}{n}\right) = C_n$ トヲイテ

$C_n^m \in \overline{V}(e); m = 0, \pm 1, \dots, \pm m_n; m_n \leq n;$

$C_n^{m_n+1} \in V(e)$

ナル如キ正整数 m_n ト定メル (但シ $C_n^m \in \overline{V}(e); m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ ナラバ $m_n = n$ トヲク)。然ラバ $C_n^{m_n} \in \overline{V}_1(e)$ デ
 アル。何者、若シ然ラズンバ $\overline{V}_1(e)^2 \subset V(e) = \exists \parallel C_n^{m_n+1} \in V(e)$ トナツテ了フ。ヨツテ $C_n^{m_n}$, Teilfolge $C_{n_i}^{m_{n_i}}$
 $\rightarrow d \neq e. D(C_{n_i})^{n_{n_i}} \rightarrow D(d) \neq E.$ 上ト同様 = シテ
 $m_{n_i} \{D(C_{n_i})^{m_{n_i}} - E\} \rightarrow \log D(d).$

即ち $m_{n_i} \{D(a\left(\frac{1}{n_i}\right)) D(b\left(\frac{1}{n_i}\right)) - E\} = m_{n_i} \{D(a\left(\frac{1}{n_i}\right)) - E$
 $+ D(b\left(\frac{1}{n_i}\right)) - E + [D(a\left(\frac{1}{n_i}\right)) - E][D(b\left(\frac{1}{n_i}\right)) - E]\} \rightarrow \log D(d).$

所ガ $0 \leq m_{n_i} \leq n_i$ 故カラ適當ナ Teilfolge トルト

$\lim \frac{m_{n'_i}}{n'_i} \rightarrow t_0 \leq 1.$ 故 =

$$\lim_{i' \rightarrow \infty} m_{n_{i'}} \left\{ D(a(\frac{1}{n_{i'}})) - E \right\} = \lim_{i' \rightarrow \infty} m_{n_{i'}} \log D(a(\frac{1}{n_{i'}})) \\ = \lim_{i' \rightarrow \infty} \log D(a(\frac{m_{n_{i'}}}{n_{i'}})) = \log D(a(t_0)) = t_0 U.$$

$$\exists \text{ ッテ } m_{n_{i'}} \log D(C_{n_{i'}}) \rightarrow t_0 (U + V)$$

$$\text{即チ } D(d) = \exp(t_0 (U + V)).$$

然シテ $d \neq e$ 故カラ $D(d) \neq E$ 故カラ $t_0 \neq 0$. 斯クテ

第五段. $a_i \in \overline{\mathfrak{of}}$, $a_i \neq e$, $a_i \rightarrow e$ ナル如キ Folge $\{a_i\}$ ヲ與ヘレバ $\overline{\mathfrak{of}}$, one-parameter subgroup $a(t)$ 及ビ $\mathfrak{of}$, one-parameter subgroup $D(a(t)) = \exp tU$ が定マル。斯ル U ヲ $\mathfrak{of}$, infinitesimal operator ト名ヅケルト斯ル U , 全体ハ real number ヲ係数トスル linear manifold $\mathcal{T}$ ヲ作リ $\exp V \in \mathfrak{of}$, $V \in \mathcal{T}$, 且ツ V が充分 0 = 近イト $D(a) = \exp V$ ナル $a \in \overline{\mathfrak{of}}$ ハ e = 近イコトが分ツタ。

第六段. $\mathfrak{of}$ ノ有限次元ト云フ假定カラ $\mathcal{T}$ ハ有限コノ一次独立 (real number ヲ係数トシテ) ナ Base $U_1, U_2, \dots, U_k$ ヲモツコトがワカルガ $a \in \overline{\mathfrak{of}}$ が充分 e = 近イナラバ $D(a) = \exp U$, $U \in \mathcal{T}$ デアル。ソレハ本紙談話 291 ノ論法ヲ使ヘバヨイ。即チ

$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, element デ $|U| \leq \alpha < 1$ ヲ満足スルモノトシ $\mathfrak{of}' \subset \exp \mathcal{T}'$, $U \in \mathcal{T}'$ ノ全体トスル。 $\mathfrak{of}'$ ハ群デハナイガ任意ノ element ト共ニ確カニ $\mathcal{T}'$ ノ inverse ヲ含ム Gruppenkeime デアル。

今 $a_i \in \overline{\mathcal{O}_f}$, $a_i \rightarrow e$ トスレバ 充分大 $i = \infty$ 對シ
 $D(a_i) \in \mathcal{O}_f'$ デアル。若シ然ラズトスレバ $\mathcal{O}_f'$ が $\mathcal{O}_f =$ 於テ開
 ナテアルカラ, 各 $i = \infty$ 對シ

$0 < \eta_i = |D(a_i)T_i - E| \leq |D(a_i)T - E|$; $T_i, T \in \mathcal{O}_f'$
 ナル如キ η_i, T_i が存在セネバナラヌ。然シテ $E \in \mathcal{O}_f'$ ナカ
 ラ $D(a_i) \rightarrow E = \infty$ リ $\eta_i \rightarrow 0$ 従ッテ $T_i \rightarrow E$ デアル。故
 $= T_i = D(b_i)$ トヲケバ $b_i \rightarrow e$ 従ッテ $D(a_i)T_i = D(a_i b_i)$
 $=$ 於ケル $a_i b_i \rightarrow e$ 且ツ $a_i b_i \neq e$ 。ヨッテ第二段ノ論法 =
 ヨリ或 *Teilfolge* = 對シ

$$(a_{i'}, b_{i'})^{n_{i'}} \rightarrow d \neq e,$$

$$n_{i'} \{D(a_{i'} b_{i'}) - E\} \rightarrow \log D(d) \neq 0.$$

従ッテ 特 = $n_{i'} \eta_{i'} \rightarrow \beta \neq 0$

今 $D(b_i) = \exp U_i$, $U_i \in \mathcal{J}$ トヲクト $U_i \rightarrow 0$ デアル。

$$\begin{aligned} & |D(a_{i'}) \exp(U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)) - E| \leq |D(a_{i'})| \\ & |\exp(U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)) - \exp(U_{i'}) \exp(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d))| \\ & + |D(a_{i'}) \exp U_{i'} \exp(-\frac{1}{n_{i'}} \log D(d)) - E| \end{aligned}$$

= 於ケル右辺ノ第一項ハ

$$|D(a_{i'})| O(|U_{i'}| \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)) = O(\frac{1}{n_{i'}}) = O(\eta_{i'})$$

(何者、 $U_{i'} \rightarrow 0 =$ シテ且ツ一般 = $|\exp(A+B) - \exp A \exp B|$
 $= O(|A||B|)$ デアルカラ)

第二項ハ

$$\left| \left(E + \frac{1}{n_{i'}} \log D(d) + o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right) \right) \left(E - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d) + o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right) \right) \right| \\ = o\left(\frac{1}{n_{i'}}\right) = o(\eta_{i'}).$$

ヨ ッテ $|D(a_{i'}) \exp(U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)) - E| = o(\eta_{i'})$ デアル。

所ガ $U_{i'}, \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)$ ハ $\mathcal{T}$, element 然且 ッ i' ガ充

分大キイト 明 $= |U_{i'} - \frac{1}{n_{i'}} \log D(d)| \leq \alpha$ 然カラ $T_{i'}$ ノ撰

ミ方 = 矛盾スル。ヨ ッテ i ガ充分大キイト $D(a_i) \in \mathcal{O}'$ ナル

可シ。

第七段. 定理ノ最後ノ部分ハ Schrier ノ定理 = ヨ
リ連結ナ $\overline{\mathcal{O}}$ ノ任意ノ element ハ、任意ノ e ノ近傍ノ
element 有限コノ composition トシテ得ラレルコト
カラワカル。

昭和十一年度 1月—6月分、會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室

清水辰次郎

振替口座番號 大阪一七七四三番

(尚前期會費未納ノ方ハ前期會費ヲ至急御拂込ミ願ヒ
マス。)

前期會計決算ハ第84號ニ報告シテアリマス。