



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 補助変数ヲ含ム微分方程式                                                                |
| Author(s)    | 福原, 満洲雄                                                                     |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1936, 89, p. 3-6                                                 |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74318">https://doi.org/10.18910/74318</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

### 393 補助変数ヲ含ム微分方程式

福原満洲雄(北大)

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$$

ノ右辺ガ  $y, \lambda =$  関シテ微分出来ルトキ, 其ノ解ノ  $\lambda =$  開スル微分可能性ノ定理ハ微分方程式ノ特異点ノ研究ニモ重要ナ役割ヲ演ズルカラ、解ノ存在定理ヲ单独條件ナドト同ジ程度ニ精密ナ結果ヲ出シテ置クコトガ望マシイ。而モ其レ等ガ解ノ存在定理ノ應用トシテ求メラレルコトヲ以下ニ於テ簡單ニ述ベテ見タイ。

$\varphi_0(x)$  ハ  $0 < x \leq a$  テ連続ナ

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda_0)$$

ノ解,  $f(x, y, \lambda)$  ハ

$$(3) \quad 0 < x \leq a, \quad |y - \varphi_0(x)| \leq b_1(x), \quad |\lambda - \lambda_0| \leq c$$

テ連続テ

$$f(x, y, \lambda) = f(x, \varphi_0(x), \lambda_0) + k(x, y, \lambda)(y - \varphi_0(x)) \\ + l(x, y, \lambda)(\lambda - \lambda_0)$$

ト書クコトガ出来ルトスル。(  $f$  ガ  $y, \lambda =$  関シテ連続ナ偏導函数ヲ持テバ平均値ノ定理ヲ使ツテ此ノ形ニ書ケル)

$k(x, y, \lambda), l(x, y, \lambda)$  ハ

$$(4) \quad |k(x, y, \lambda)| \leq H(x), \quad |l(x, y, \lambda)| \leq K(x)$$

ヲ満足シ

$$\frac{1}{H(x)} h(x, y, \lambda), \quad \frac{1}{K(x)} k(x, y, \lambda)$$

ハ (3) デー様連続トスル。

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{y(x) - y_0(x)}{r(x)} = 0 \quad \text{即ち} \quad y(x) = y_0(x) + o(r(x))$$

ヲ満足スル (1) ノ解ヲ  $y = \varphi(x, \lambda)$  トスルトキ

$$(6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\varphi(x, \lambda) - \varphi_0(x)}{\lambda - \lambda_0} = \psi_0(x)$$

が存在スルタメ  $H(x), K(x)$  が満足スベキ十条件ヲ求  
メルノが目的デアル。成ルベク式ヲ簡單ニスルタメ

$$H(x) = \frac{\eta'(x)}{\eta(x)}, \quad \eta(x), \eta'(x) > 0$$

ト假定スル。

$$(7) \quad h_0(x) = h(x, \varphi_0(x), \lambda_0), \quad k_0(x) = k(x, \varphi_0(x), \lambda_0)$$

ト置ケバ,  $u = \psi_0(x)$  ハ

$$(8) \quad \frac{du}{dx} = h_0(x)u + k_0(x)$$

ノ解デナケレバナラナイ。此ノ方程式ガ  $u = o(r(x))$  ヲ満  
足スル解ヲ唯一ツ持ツタメニハ

$$(9) \quad r(x) = O(\eta(x))$$

$$(10) \quad \int_0^x \frac{K(x)}{\eta(x)} dx = o\left(\frac{r(x)}{\eta(x)}\right)$$

デアレバヨイ。ソノ時

$$|\psi_0(x)| \leq \eta(x) \int_0^x \frac{K(x)}{\eta(x)} dx \equiv \Psi_0(x)$$

ヲ得ル、此ノヤウニ  $\psi_0(x)$  テキメテカラ

$$y = \varphi_0(x) + \psi_0(x)(\lambda - \lambda_0) + z$$

ト置キ、 $z$  が満足スル方程式ヲ

$$(11) \quad \frac{dz}{dx} = g(x, z, \lambda)$$

ト書ケバ

$$g(x, z, \lambda) = h(x, y, \lambda)z + [h(x, y, \lambda) - h_0(x)](\lambda - \lambda_0)\psi_0(x) \\ + [h(x, y, \lambda) - h_0(x)](\lambda - \lambda_0)$$

トナルカラ正ノ数  $\varepsilon$  が與ヘラレヌトキ、正ノ數  $\beta, \gamma$  ヲ  $\varepsilon = \beta + \gamma$  取レバ

$$0 < x \leq a, \quad |z| \leq \beta r(x), \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \gamma$$

ヲ

$$|g(x, z, \lambda)| \leq H(x)|z| + \varepsilon \{H(x)\psi_0(x) + K(x)\}|\lambda - \lambda_0|$$

ヲ得ル、故ニ存在定理及ビ比較定理ヲ使ツテ (11) ト

$$(12) \quad \frac{dz}{dx} = H(x)z + \varepsilon \{H(x)\psi_0(x) + K(x)\}|\lambda - \lambda_0|$$

ヲ比較スレバ次ノ結論ヲ得ル。(12) が  $z = 0(r(x))$  ヲ満足スル解

$$z = \varepsilon |\lambda - \lambda_0| \psi_1(x)$$

ヲ持テバ  $(19) =$  依ツテ唯一ツニ限ル、(11) ハ  $z = 0(r(x))$

ヲ満足スル解ヲ持テ、其ノ解ハ

$$|z| \leq \varepsilon |\lambda - \lambda_0| \psi_1(x)$$

ヲ満足スル、依ツテ

$$(13) \quad \left| \frac{\varphi(x, \lambda) - \varphi_0(x)}{\lambda - \lambda_0} - \psi_0(x) \right| \leq \varepsilon \psi_1(x), \quad \psi_1(x) = 0(r(x))$$

トナリ (6)ヲ得ル、(12)が  $Z=0$  ( $\gamma(x)$ )ヲ満足スル解ヲ持  
ツタメハ

$$(14) \int_0^x K(x) \frac{\log \eta(x)}{\eta(x)} dx = 0 \left( \frac{\gamma(x)}{\eta(x)} \right)$$

デアレバヨイ、(10)ハ (14)ノ結果デアルカラ、 $\eta(x)$ ,  $K(x)$   
が満足スベキ條件ハ (9), (14)デ、ソノ時 (13)ヲ得ル。此ノ定  
理ノ應用ニ関シテハ別ノ機會ヲ述ベルコトニシヨウ。

以上述べタ方法ハ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f(x, \lambda) - f_0(x)}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha}$$

が存在スル條件ヲ求メル場合ニモ或ハモット一般ナ場合ニモ  
何ノ困難モナシニ拡張サレルが最モヨク利用サレルノハ  $\alpha=1$   
ノ場合デアルカラ此ノ場合ニツイテ述べタノデアル。尚ホ  
 $f(x, y, \lambda)$ が  $y, \lambda$ ニ関シテ解析函数ナラバ (13)ハ複素変数  
入ノ函数  $\varphi(x, \lambda)$ が  $\lambda$ ニ関シテ微分出來ルコトヲ示スカラ  
 $\varphi(x, \lambda)$ ハ  $\lambda$ ノ正則函数トナルコトヲ知ル。