396 *Linear Operation* ニツイテ(I)

泉　信一 (東北大)
北川敏男 (阪大)

本論文ノ目的ハ *translatable* (乃チ *translation*

ト commutative ナ operation ガ integration ト commutative デアルカドウカヲ論ズルコトデアル。

1. (a,b) ヲ有限區間トスル。$f(x)$ ヲ (a,b) ニ於イテ定義サレタ積分可能ナ函數トシ，$f(x)$ ノ作ル空間ヲ E トスル。$\Lambda f=\Lambda(f(x))$ ヲ E ニ於テ定義サレタ additive デヨツ translatable ナ operation デ，Λf ノ contradomain ハ (a,b) ニ於テ定義サレタ積分可能ナ函數ノ作ル空間 E_1 ニフクマレテヰルトスル。但シ (a,b) ニ於テ定義サレタ函數ニ periodic continuation ヲシテ $(-\infty,\infty)$ ニ於テ定義サレタ函數ヲ考ヘルモノトスル。

更ニ Λf ハ次ノ條件ヲ滿足スルトスル、乃テ

$\boxed{條件 1°}$ $f_n(x)\varepsilon E\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ ナルトキ，殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

トナル様ナ $f(x)\varepsilon E$ ガ存在スルナラバ，スベテノ x ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(f_n(x))=\Lambda(f(x)). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

例ヘバ，$E=L(a,b)=(L)$ ニトリ，ソノ元素 f ノ norm ヲ

$$\|f\|=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

ニヨツテ定義スル．E_1 ヲ (M) 又ハ (C) ニトリ、ソノ element $g=\Lambda f$ ノ norm ヲ

$$\|g\|=\underset{a\leqq t\leqq b}{l.u.b.}\ g(t)$$

ニヨツテ定義スル。然ルトキ，Λf ガ *linear translatable* ナラバ，條件1°ハ明カニ滿足サレテ居ル。

又EガAヽ(L^P)，(M)，(S)，(C)ノ内ノ一ツノ空間デ，E_1ガ(M)又ハ(C)ノ一ツナルトキ、*norm* ヲ通常ノ樣ニトレバ *linear transl.* ナΛfハ明カニ條件1°ヲ滿足スル。ケレドモ $E_1=(L^P)$ $(P>0)$トシ、ソノ元素gノ *norm* ヲ

$$\|g\|=\sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}$$

ニトルトキ $\Lambda f=g$ ガ *linear transl.* デアツテモ．必ズシモ條件1°ハ滿足サレナイ。 $E_1=(S)$ノトキニモ同樣デアル。

2. $a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

トオク。

$$\Lambda(f(x))=g(t)$$

トオク。

特ニ$\Lambda(f(x))$ガtノ函數デアルコトヲ明カニスルタメニ

$$\Lambda(f(x))=\Lambda\{t,f(x)\}$$

トモ書ク。Λノ *translatable* ナルコトカラ

$$\Lambda(f(x+a))=\Lambda\{t,f(x+a)\}=\Lambda\{t,T_a f(x)\}$$
$$=T_a\Lambda\{t,f(x)\}=g(t+a)$$

Λノ *additiv* ナルコトカラ

$$\sum_{i=1}^{n} g(t+\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\Lambda\{t,f(x+\xi_i)\}(\xi_{i+1}-\xi_i)$$

$$= \Lambda\left\{t, \sum_{i=1}^{n} f(x+\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)\right\}$$

然ルニ、一方ニ於イテ $f(x)$ 及ビ $g(t)$ ガ可積分デアルカラ Khintchine-Jessen ノ定理[1] ニヨリ、次ノ抄整数列 $\{n_k\}$ 及ビ $\{\xi_k\}$ ヲトルコトガ出来ル。乃チ殆ンドスベテノ x 及ビ t ニ對シテ同時ニ

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} f(x+\xi_i) = \int_a^b f(x+\xi)\,d\xi .$$

及ビ

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} g(t+\xi_i) = \int_a^b g(t+\xi)\,d\xi$$

從ッテ條件 1° カラ

$$\lim_{n_k\to\infty} \Lambda\left\{t, \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} f(x+\xi_i)\right\} = \Lambda\left\{t, \int_a^b f(x+\xi)\,d\xi\right\}$$

故ニ

$$\int_a^b \Lambda\{t+\xi, f(x)\}\,d\xi = \Lambda\left\{t, \int_a^b f(x+\xi)\,d\xi\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1 條件 1° ヲ満足スル Additive translatable operation Λf ハ integration ト commutative デアル。乃チ (2) ガ成立スル。

3. 次ニ條件 1° ガ次ノ條件ニヨッテオキカヘラレタ場合

---

(1) A. Khintchine, Recueil math., Moscou, 41 (1934) and B. Jessen, Annales of Math., 35 (1934).

ヲ考ヘル．乃チ

$\boxed{\text{條件}2^\circ}$ 條件1°ト同ジ假定ノ下ニ(1)ガ殆ンド常ニ成立スルトスル。

然ルトキ定理1ト同様ニシテ次ノ定理ヲ得ルコトハ勿論デアル。

$\boxed{\text{定理}2}$ 條件2°ヲ満足スル additive translatable operation Λf ハ殆ンド常ニ integration ト commutative デアル、乃チ(2)ガ殆ンドスベテノtニ對シテ成立スル。

特ニEＥ及ビE_1ガ空間（L^p），$(p>0)$，(M) 及ビ (C) ノウチノ何レカーツデ且ツΛfガ linear translatable ノトキニハ，定理2カラ(2)ガ殆ンドスベテノxニ對シテ成立スル。

4. 次ニ條件1°又ハ2°ノ代リニ次ノ條件ガ満足サレテルトスル。乃チ

$\boxed{\text{條件}3^\circ}$ $f(x)\varepsilon E$ニ對シテ

$$|\Lambda\{t, f(x)\}|\leqq G|f(t)|$$

トナル様ナGガ存在スル。

(c,d)ヲ任意ノ區間トシ

$$c=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=d \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トオク。任意ノ$f\varepsilon E$ニ對シテ，殆ンドスベテノxニ對シテ

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x),\ |f_m(x)|\leqq|f(x)| \quad (m=1,2,\cdots) \cdots\cdots (4)$$

トナルヤウナ連續函數列$\{f_m(x)\}$ヲ作レ。

今條件3°ガ満足サレテルトスルトキ

$$g_m(t)=\Lambda\{t, f_m(x)\}$$

トオクナラバ

$$\lim_{m\to\infty} g_m(t)=g(t) \text{ ------------------------ } (5)$$

然ルニ §2 ト同様ニシテ

$$\sum_{i=1}^{n} g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i)=\Lambda\left\{t, \sum_{i=1}^{n} f_m(x+x_i)(x_{i+1}-x_i)\right\}$$

Holm[(1)] ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_m(t+x_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_c^d g_m(t+x)\,dx$$

ナルヤウニ (3) ヲトルコトが出来ル。然ルニ又 $f_m(x)$ ノ連続ナコトカラ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_m(x+x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\int_c^d f_m(x+u)\,du$$

故ニ條件 1° カラ

$$\int_c^d g_m(t+x)\,dx=\Lambda\left\{t, \int_c^d f_m(x+u)\,du\right\}$$

(4) 及ビ (5) カラ、両辺ニ於テ $m\to\infty$ ナラシメルトキ

$$\int_c^d g(t+x)\,dx=\Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\}$$

乃チ

$$\int_c^d \Lambda\{t, f(x+u)\}\,du=\Lambda\left\{t, \int_c^d f(x+u)\,du\right\} \text{ -------- } (6)$$

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

---

(1) H. Hahn, Wiener Berichte, 123, IIa, 1 (1914), pp. 713—743

$\boxed{\text{定理3}}$ 任意ノ *additive translatable operation* Λ ガ條件3°ヲ満足スルナラバ，Λ ハ任意ノ區間ニ於ケル積分ト *commutative* デアル、乃チ (6) ガ成立スル。

定理ハ區間 (a, b) ガ $(-\infty, \infty)$ ノトキニモ成立スル．