



Title	特殊ナガロア体ノ構成ニ就テ（Ⅰ）
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 90, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74322
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

397. 特殊ガロア体ノ構成=就テ(I)

淡 中 忠 郎 (東北大)

「與ヘラレタ基礎体 K ノ上ニ與ヘラレタガロア群 G ヲモツ体ガアルカ」トイフヨク知ラレタ問題ヲ特殊ノ場合ニ考ヘテ見タイト思ヒマス。

Brauer (Crelle Bd. 168 1932) が最初ニコノ問題ヲ Ring ト関係付ケテカラ同シ種類ノ論文カニ三出テ居リマスガ、コノテ述マタイノハ最近出タ Witt ノ論文 (Crelle Bd. 174 (1936)) ノ考ヘヲ使ツテ次ノ定理ヲ証明スルコトデス。

(定理) K コ $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ (p ハ素数) デアレバ K ノ上ニ任意ノ p -Gruppe G ヲガロア群トスル体ガアル。」
勿論 K ハ代数々体トシマス。

§ 1. Witt ノ Konstruktion.

説明ノ都合上先ツ上記ノ論文ニアル Witt ノ構成法ヲ述ベル。
 G ヲ p -Gruppe, $G^* \triangleq G/G^*$ ガ $(p, p, \dots, p)$ ノ型ニナル最小ノ分群トスレバ $G^* \neq 1$ ノ時ニハ G^* ト G ノ Zentrum ト Durchschnitt ノ中 $= p$ 次ノ群 g ガトレル、コノ g ノ単位表現デナリ Character 1-ツヲ χ トスル。

群 G ヲ $g \triangleq G/g = \Gamma$ デ erweitern シタモ、ト考ヘテ
ソノ拡大ノ條件ヲ何時モノ様ニ

- (1a) $u_\sigma u_\tau = g_{\sigma, \tau} u_{\sigma\tau}$
- (1b) $u_\sigma g = g u_\sigma \quad (p, \sigma, \tau, \dots \in \Gamma)$
- (1c) $g_{\sigma, \tau} g_{\rho, \sigma\tau} = g_{\rho, \sigma} g_{g\rho, \tau}$

トスル。我々ハ帰納法ニ依ッテ定理ヲ証明シタイノデアルカ
ラ Γ ヲ群ニモッ体 K がスデニ出来タトスル。ユノトキモ
シ

$$(2) (\chi(g_{\sigma, \tau}), K/k, \Gamma) \sim 1$$

ナラバ

$$\chi(g_{\sigma, \tau}) = \frac{\delta_{\sigma}^{\tau} \delta_{\tau}}{\delta_{\sigma \tau}}$$

$$1 = \chi(g_{\sigma, \tau})^p = \frac{(\delta_{\sigma}^{\tau})^{\tau} \delta_{\tau}^p}{\delta_{\sigma \tau}^p}$$

従ッテ $\delta_{\sigma}^p = \gamma^{\sigma^{-1}} \quad (\gamma \in K).$

コノ γ ヲ使ッテ $K(\theta)$ ($\theta = \sqrt[p]{\gamma}$) ヲ作ルト $K(\theta)/k$ ノ ガロア
群が $G = \text{ナル}$ 。(証明ハ Witt 参照)

γ ハコノ際上ノ *process* カラ得ラレル数デアレバ、ド
ノマウチ数デアッテモ差支ヘナイ、従ッテ (2) ノ假定ノ下ニ
得ラレル一般ノ γ ノ形ハ

$$(3) \gamma' = \gamma \alpha^p \beta \quad (\alpha \in K, \beta \in k)$$

デアアル。

§ 2. (定理 1) G が與ヘラレタ p -Gruppe

$$k = R(e^{\frac{2\pi i}{p}})$$

ナラバ G ノ ガロア 群ニモッ体 K がアッテ而モ次ノ條件ヲ満
足スル。

1. k ノ *unendliche Primstelle* ハ K 内 *verz-*
reigen シナイ。

2. $\mathfrak{m}$ *Primideal* $\mathfrak{o}$ が K 内 *岐スレバ*

$$\mathfrak{o} \nmid p, \quad \zeta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{o}^f} \quad (\text{in } k)$$

K/k 上の q の相対次数は 1.

$$\left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}, f \text{ は与えられた自然数} \right)$$

$g \in G$ によって作られる群, $G_1 = G/g$ とする. G_1 は G と同じ性質を持つ群 (principal subgroup と centrum = 共通な p 次の群) を g_1 とし $G_2 = G_1/g_1$ とする. 以下同様にして $G_{k-1} = G_{k-2}/g_{k-2}$, $G_k = G_{k-1}/g_{k-1}$ を作り G_k が始まる $(p, p, \dots, p)$ の型になる.

定理 1 が G が $G_k, G_{k-1}, G_{k-2}, \dots$ の場合 = 帰納法 = 依って証明する. デアルが G_k のとき後は述べられる. シ, コレで G_k の時 = ハスデ = 出来上ったモノとする.

サスレバ定理 1 が $G^* \neq 1$ ナル群, Faktorgruppe

$\Gamma = G/g$ = 就いて証明されるモノ = G = 就いて成立するコトヲ云へば証明が終るワケデアル. Γ = 對する体 K とする.

§ 1 の様 = シテ作つた環ヲ

$$A = (\chi(g_{\sigma, \tau}), K, k, \Gamma)$$

トスレバ

$$A \sim 1$$

ハ次の様 = シテワカル.

$\alpha)$ k の Primstelle 一般 = $\mathfrak{p}$ とする

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ ナラバ定理 1 の条件 1 = ヨツテ

$$A_{\mathfrak{p}} \sim 1.$$

$\beta)$ $\mathfrak{p}$ が K_1 で unverzweigt なら $K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ は
zyklisch である

$$A_{\mathfrak{p}} \sim (a_{\sigma, \tau}, K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}, \Gamma_{\mathfrak{p}}) = B_{\mathfrak{p}}$$

但し $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ は Zerlegungsgruppe で $a_{\sigma, \tau}$ は
 $\sigma, \tau \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ かつ $\chi(g_{\sigma, \tau})$, subset である $\Gamma_{\mathfrak{p}}$, Erzeugende
は $F, B_{\mathfrak{p}}$ が

$$\begin{aligned} u_S u_T &= a_{S, T} u_{ST} & u_i &= 1 \\ \alpha u_S &= u_S \alpha^S & \alpha &\in K_1^{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

が定義されてキル α のシテ之レヲ次ノ標準型 = 直ス。

$$v_F^i = u_F^i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1, n = (K_1^{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}))$$

$$v_F^n = a_{F, F} a_{F^2, F} a_{F^3, F} \dots a_{F^{n-1}, F} = \alpha$$

$$B_{\mathfrak{p}} = (\alpha, K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}, F)$$

α は unit であるから $\alpha = N_{K_1^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}}(\theta), \theta \in K_1^{\mathfrak{p}}$

$$\therefore A_{\mathfrak{p}} \sim 1$$

$\gamma)$ $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ が K_1 で分岐スル トキハ條件 2 が $A_{\mathfrak{o}} \sim 1$ が
出ル。即チ先ヅ $\mathfrak{o} \nmid \mathfrak{p}$ カラ

$$\text{Verzweigungsgruppe } V_{\mathfrak{o}} = 1$$

$K_1/k =$ 於ケル Relativgrad 1 カラ

Zerlegungsgruppe $\Gamma_{\mathfrak{o}} = \text{Trägheitsgruppe } T_{\mathfrak{o}}$
ヨリ知ラレヌ様 = $T_{\mathfrak{o}}/V_{\mathfrak{o}}$ は zyklisch

$$\therefore \Gamma_{\mathfrak{o}} \text{ は } \underline{\text{zyklisch}}$$

$\mathfrak{o} \nmid \mathfrak{p}$ カラ $f(K_1^{\mathfrak{o}}/k_{\mathfrak{o}}) = \mathfrak{o}$ 。定理 1, 中, f は

充分大 = トツテ置イタモノト考ヘレバ

$$\zeta \equiv 1 \pmod{f(K_1^q/k_q)}$$

即チ ζ は K_1^q カラノ代数数, Naum トナル。

$\therefore$ ρ) ト全様 =

$$A_q \sim 1$$

従ツテ環, Naemensatz カラ

$$A \sim 1$$

ガ結論サレル。

サスレバ §1 デ述ベタ方法デ G グ群 = 持ッ体 $K_2 = K_1(\sqrt[p]{Y})$ が作レル。コノ K_2 ガ定理1ノ條件ヲ満足シテ居レバ問題ハ片付イタワケデアルガ一般ニハソウハユカナイカラ $Y = \text{ハ}$
 §1. (3) ノ形ノ自由性ノアルコトヲ利用シテ適當ナ Y' ヲ
 トレバ $K_2' = K_1(\sqrt[p]{Y'})$ ガ條件ヲ満足スルコトヲ次ニ示
 シタイ。