OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	或種ノ積分方程式ニツイテ （IV）
Author(s)	泉, 信一; 北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 90, p. 9-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74324
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

399. 或種ノ積分方程式ニツイテ(IV)

泉　信一 (東北大)

北川敏男 (阪大)

本論文ノ目的ハ前ニ、(I)-(III)デ考ヘタ積分方程式ヲモット廣イ附帯條件ノ下ニ解クコトデアル。

積分方程式

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t) \qquad (1)$$

ヲ考ヘル．コヽニ $\varphi_k(t)$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ ハ (a,b) ニ於イテ有界変分デアルトスル。附帯條件トシテ

$$f^{(k)}(x)=O(e^{g(x)}) \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1) \qquad (2)$$

テトル，コヽニ、$g(x)$ ハ $(-\infty,\infty)$ ニテ定義サレタ偶函数デ $x\geqq 0$ ニテ増加函数トスル．又簡単ノタメニ，$a=-1$，$b=1$ トスル。

(2) カラ

$$|f^{(k)}(x)|\leqq B_k e^{g(x)} \quad (k=0,1,\cdots\cdots,n-1) \qquad (3)$$

$x>2$ ノトキ

$$|f^{(n)}(x)|\leqq\sum_{k=0}^{n-1}B_k\int_{-1}^{1}e^{g(x+t)}|d\varphi_k(t)|$$

$$\leqq\sum_{k=0}^{n-1}B_k e^{g(x+1)}\int_{-1}^{1}|d\varphi_k(t)|$$

故ニ $\int_{-1}^{1}|d\varphi_k(t)|=C_k$ トオクトキ (4)

$$|f^{(n)}(x)|\leqq\left(\sum_{k=0}^{n-1}B_k C_k\right)e^{g(x+1)}$$

故ニ

$$B_n=\sum_{k=0}^{n-1}B_k C_k \qquad (5)$$

トオクトキ，$|f^{(n)}(x)|\leqq B_n e^{g(x+1)}$ (6)

然ルニ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル，

モシ

$$|f^{(n+\nu)}(x)| \leqq B_{n+\nu}\, e^{g(x+\nu+1)} \quad (\nu = 0, 1, \cdots\cdots, m-1) \tag{7}$$

トナル様ナ $B_{n+\nu}\ (\nu = 0, 1, \cdots\cdots, m-1)$ ガ定マッタトスレバ，

(I) カラ

$$f^{(m+n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} f^{(m+k)}(x+t)\, dg_k(t),$$

従ッテ (II) カラ

$$|f^{(m+n)}(x)| \leqq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k} C_k \right) e^{g(x+m+1)}$$

故ニ $$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k} C_k \tag{8}$$

トオクトキ，(II) ハ $n = m$ ノトキ成立スル．従ッテ一般ニ

$$|f^{n+\nu}(x)| \leqq B_{n+\nu}\, e^{g(x+\nu+1)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{10}$$

然ルニ，方程式

$$X^n - \sum_{k=1}^{n-1} C_k X^k - C_0 X = 0 \tag{11}$$

ノ最大ノ正根ヲξトシ，

$$Max\left(\xi, B_0, B_1, \sqrt[2]{B_2}, \cdots\cdots, \sqrt[k]{B_k}, \cdots\cdots, \sqrt[n-1]{B_{n-1}}, \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k}\right) = D \tag{12}$$

トオクナラバ，容易ニ会ル如ク

$$|f^{(n+\nu)}(x)| \leqq D^{n+\nu} e^{g(x+\nu+1)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{13}$$

ヲ得ルカラ，従ッテ

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} r^{\nu} \ll \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{D^{\nu} e^{g(x+\nu+1-n)}}{\nu!} r^{\nu} \tag{14}$$

サテ、コンデ

$$\sqrt[\nu]{\frac{D^{\nu} e^{g(x+\nu-n+1)}}{\nu!}} = e^{\frac{g(x+\nu-n+1)}{\nu} - \log \nu + 1 + \log D} \qquad (1+o(1))$$

デアルカラ、(16) ノ右辺ガ収斂半径ガ1ヨリ大ナルタメニハ、

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\frac{g(x+\nu-n+1)}{\nu} - \log \nu + 1 + \log D} \leqq \theta < 1$$

即チ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{g(x+\nu-n+1)}{\nu} - \log \nu + 1 + \log D \right\} < \alpha < 0$

トナレバヨイ。ソレニハ、

$$\frac{g(x)}{x} < \log x + A, \qquad \text{for } x \geqq x_0. \qquad (15)$$

トナル様ナ x_0 及ビ $A < -\log De$ ガ存在スレバヨイ。

結局、$x > 2$ ナルスベテノ x ニツキ、(16) ノ左辺ハ常ニ convスル。$x \leqq 2$ ノトキモ同様ナ議論ヲ進メウルコトハ容易ニワカル。

故ニ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(x+t)\, d\varphi_k(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(k+m)}(x)}{m!} t^m \right\} d\varphi_k(t)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} f^{(\lambda)}(x) \sum_{\substack{m+k=\lambda \\ 0 \leqq k \leqq n-1}} \frac{1}{m!} \int_{-1}^{1} t^m\, d\varphi_k(t)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda f^{(\lambda)}(x), \quad \text{say.}$$

故＝無限次ノ微分方程式

$$f^{(n)}(x)-\sum_{s=0}^{\infty}a_s f^{(s)}(x)=0 \tag{16}$$

ヲ取ル。(16)ノ generating function ノ order ハ1デ，maximal type ニハナラナイ（前論文，亜参照）。故＝Valiron ノ定理カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理1. $f(x)$ ハ

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t),\quad (-\infty<x<\infty).$$

及ビ附帯條件

$$|f^{(k)}(x)|\leqq B_k e^{g(x)} \qquad (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1) \tag{3}$$

ヲ満足スルモノトスル。コゝニ、$g(x)$ ハ $(-\infty,\infty)$ デ定義サレタ偶函数デ，$\geqq 0$ 且ツ x ノ増加函数デアル、更ニ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル：乃チ

$$\frac{g(x)}{x}<\log x-A,\qquad \text{for } x\geqq x_0 \tag{17}$$

トナル様ナ $x_0>0$ 及ビ $A>\log D_e$ が存在スル。但シ，コゝニ、常数 D ハ (11), (12)ニヨリ一意ニキマル正数デアルトスル。

然ルトキ，カゝル $f(x)$ が

$$f(x)=\sum p_k(x)\,e^{\lambda_k x} \tag{18}$$

ナル形ニカケルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ右辺が abs. conv ナルコトデアル。

コゝニ λ_k ハ

$$\lambda^n-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\int_a^b e^{\lambda t}\,d\varphi_k(t)=0 \tag{19}$$

ノ根デ，$P_k(x)$ ハソノ次数ハ λ_k ノ multiplicity μ_k ヨリ小サナ多項式トスル。

但シ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_{k+\mu_k}}=0 \tag{20}$$

トスル。

特ニ (19) ノ根ノ数が有限ナトキニハ，(3), (17) ヲ満足スル $f(x)$ ハ常ニ (18) デ表ハスコトが出来ル。

注意 1. 積分方程式

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt \tag{21}$$

ヲ附帯條件

$$|f(x)|\leqq e^{g(x)} \tag{22}$$

ノモトデ解ク問題ニ於イテハ，

$$F(x)=\int_0^x f(\lambda)\,d\lambda \tag{23}$$

トオキ

$$F'(x)=\frac{1}{2}\{F(x+1)-F(x-1)\} \tag{24}$$

並ビニ

$$|F'(x)|=\left|\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt\right|\leqq\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}e^{g(t)}dt$$

$$\leqq e^{g(x+1)} \tag{25}$$

ヲ満足スルコトカラ、(1) ノ特別ノ場合トシテ論ゼラレル。

コノトキ、$n=1$, $B_0=1$, $C_0=1$, $D=1$ トトレバヨイ。

條件 (11) ハ明カニ満足サレテヰル。

系. 定理 1 ニ於イテ條件 (3) ノ常数 B_k $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

が與ヘラレズ，只、漠然ト條件(2)が與ヘラレタモノトスル、然ルトキ若シ(17)ノ代リニ

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left(\frac{g(x)}{x}-\log x\right)=-\infty \tag{26}$$

が與ヘラレルナラバ，定理1ノ結果ハソノマヽ成リ立ツ。

注意2. 前論文(I)-(II)デ論ジタモノデハ，

$$g(x)=|cx| \tag{27}$$