



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, VII
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 91, p. 5-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74328
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

403. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ VII

福原満洲雄(北大)

大体ニ於テ豫期シタ結果ニ達シタコトハ數物ノ年會ニ述ベタ通りデアルカラ、前回ノ予定ヲ変更シテ整頓シタ形ニ於テ結果ノ紹介ヲ証明抜キテ述ベヨウト思フ。

特異点(I)

$$(A) \quad x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ニ於テ $f(x, y)$ が

$$(a) \quad f(x, y) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k \quad (a_{00}=0, a_{01}=\lambda \neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル場合カラ始メル。コレハ今迄ニ最モヨク研究サレタ場合デアルカラ、考ヘ直ス必要ハナイカモ知レナイガ、理論的統一ノ立場カラ述ベテ置イタ方がヨイヌウニ思フ。

形式的ノ計算 展開式(a)が何ヲ意味スルカラ問題

トシナイデ唯形式的ノ計算ニ依テ得ラレル結果ヲ先ニ述ベ

ヲ置ク。

形式的ノ解

$$\alpha) \quad y \sim \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x^j$$

ヲ求メル。コレヲ $(A) = \lambda$ レテ x^j ノ係數ヲ比較スルコト
= ヲリ

$$(j - \lambda) \alpha_j = P_j(\alpha)$$

ヲ得ル。 $P_j(\alpha)$ ハ $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ ノ整多項式ナル。

故ニ λ ハ正ノ整数デナケレバ α_j ハ唯一通りニキマル。

$$y = \alpha_1 x + \dots + \alpha_{N-1} x^{N-1} + z$$

ト置イテ、 z が満足スル方程式ヲ

$$(B) \quad x \frac{dz}{dx} = g(x, z)$$

ト書ケバ

$$(B) \quad g(x, z) \sim \sum b_{jk} x^j z^k$$

$$b_{j0} = 0 \quad (j < N), \quad b_{01} = \lambda$$

トナル。

勝手ニ常數 C ヲ含ム形式的ノ解

$$\beta) \quad y \sim \sum \alpha_{jk} x^j (Cx^\lambda)^k \quad (\alpha_{00} = 0, \alpha_{01} = 1)$$

ヲ求メル。コレヲ $(A) = \lambda$ レテ $xC^m (Cx^\lambda)^n$ ノ係數ヲ比較ス
ルコト = ヲリ

$$(m + (n-1)\lambda) \alpha_{mn} = P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。 $P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk} ($j \leq m, k \leq n$ 但シ α_{mn} ヲ
除ク) ノ整多項式ナル。故ニ λ が正ノ整数又ハ負ノ有理

数デアル場合ヲ除ケバ α_{mn} ハ唯一通りニキマル。Mハ負
デナイ整数ノ對カラ成ル有限集合デ、 (m, n) ガMニ屬ス
レバ $j \leq m$, $k \leq n$ デアルヲウナ $(j, k) \in M$ ニ屬スル
モノトスル。

$$y = \sum_M \alpha_{jk} x^j (Cx^\lambda)^k + z$$

ト置イテZガ満足スル方程式ヲ

$$(C) \quad x \frac{dz}{dx} = g(x, Cx^\lambda, z)$$

ト書ケバ

$$(C) \quad g(x, \xi, z) \sim \sum b_{lmn} x^l \xi^m z^n$$

$$b_{lmo} ((l, m) \in M), \quad b_{001} = \lambda$$

トナル。

λ ガ正、整数デアル場合ニハ形式的ノ解

$$(r) \quad y \sim \sum \alpha_{jk} x^j ((x \log x + C)x^\lambda)^k \quad (\alpha_{00}=0, \alpha_{01}=1)$$

ヲ求メル。 $x^m ((x \log x + C)x^\lambda)^n$ ノ係数ヲ比較スルコ

トニヨリ

$$(m + (n-1)\lambda) \alpha_{mn} + (n+1) \lambda \alpha_{m-\lambda, n+1} = P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。 $P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk} ($j \leq m$, $k \leq n$ 但シ α_{mn} ヲ除ク)ノ整多項式デ、添字ニ負數ノアル α_{jk} ハ0トスル。故
ニ $m=0, 1, \dots, \lambda-1$ ト置クコトニヨリ勝手ナ n ニ對シテ
 $\alpha_{0n}, \dots, \alpha_{\lambda-1, n}$ ガ唯一通りニキマル。 $m=\lambda$, $n=0$
トシ、 $\alpha_{01}=1$ ニ注意スレバ $\alpha = P_{\lambda 0}(\alpha)$ ヲ得ル。 $\alpha_{\lambda 0}$ ハ
勝手ナ値ヲ取ルコトガ出來ルガ、ソレヲCト一緒ニスルコ

トが出来るカラ混雑ヲ避ケルヌメ C ヲ勝手ナ常数トシ
 $\alpha_{\lambda 0} = 0$ トスル。 $\alpha_{\lambda 0}, \dots, \alpha_{\lambda, n-1}$ がキマツタナ
 ラバ, $m = \lambda$ ト置クコトニヨリ α_{mn} がキマル。一般ニ
 α_{jk} ($j < m$ スハ $j = m$, $k < n$ 但シ $m > \lambda$, $n \geq 0$) が
 求マツヌナラバ α_{mn} がソレカラ唯一通りニキマル。

$$y = \sum_{j+\lambda k < N} \alpha_{jk} x^j (x \log x + C) x^\lambda)^k + z$$

ト置キズが満足スル方程式ヲ

$$(I) \quad x \frac{dz}{dx} = g(x, (x \log x + C) x^\lambda, z)$$

ト書ケル

$$(d) \quad g(x, \varepsilon, z) \sim \sum b_{lmn} x^l \varepsilon^m z^n$$

$$b_{lm0} = 0 \quad (l + \lambda m < N), \quad b_{001} = \lambda$$

トナル。

λ が負ノ有理数デアル場合が残ツテキルが, 此ノ場
 合ニハ形式的ノ解が大シテ重要ナ意味ヲ持ヌナイカラ省
 ク。

假定ノ取り方 (a) = 関スル假定ヲ成ルベク弱イ所カラ
 出発シテ $f(x, y)$ が $(0, 0)$ デ正則トイフ所マデ次第ニ強
 クシテ行キ, 其ノ結果 (A) ノ解ニドレダケノ影響ガ現ハレ
 ルカラ見ル。

$$f(e^t, e^\lambda) = \mathcal{F}(t, \lambda)$$

ト置キ $\mathcal{F}(t, \lambda)$ ハ考ヘテキル範圍デ一價ト假定スル。

$f(x, y)$ ハ $(0, 0)$, 近傍デ多價函数デアツテモ差支ヘ
 ナイ。

$$t = \sigma + i\tau, \quad \lambda = \rho + i\eta$$

ト置ク。

$$1^\circ \quad \mathcal{F}(t, \lambda) \wedge$$

$$(1) \quad \begin{cases} \tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, & \sigma \leq \sigma_0 \\ \eta_1 + \rho \tan \omega_1 < \eta < \eta_2 + \rho \tan \omega_2, & \rho < \rho_0 \end{cases}$$

デ連続デ, 漸近展開 (a) ハ (t, λ) が (1) ヲ満足シテかつ
 $(\infty, \infty) =$ 近ツクトキ成立スル。

2°. 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t, \lambda)$ が $\lambda =$ 関シテ正
 則デアルトイフ假定ヲ加ヘル。

3°. 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t, \lambda)$ が $\lambda =$ 関シテ $2\pi i$
 ヲ週期トスルトイフ假定ヲ加ヘル。

$$\mathcal{F}(t, \log y) = F(t, y)$$

ト置ケバ $F(t, y) \wedge y = 0$ デ正則デ

$$(2) \quad F(t, y) = \sum F_n(t) y^n$$

$$(3) \quad F_n(t) \sim \sum a_{jn} e^{j't}$$

トナル。(2) ハ

$$(4) \quad \tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \leq \sigma_0, \quad |y| \leq \Delta_0$$

ニ於テ一様収斂, (3) ハ

$$(5) \quad \tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \rightarrow -\infty$$

ノトキ成立スル。

$$4^\circ \quad \mathcal{F}(t, \lambda) \wedge$$

$$(6) \quad \begin{cases} \tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, & \sigma \leq \sigma_0 \\ \eta_1 + \rho \tan \omega_1 \leq \eta \leq \eta_2 + \rho \tan \omega_2, & \rho \leq \rho_0 \end{cases}$$

デ連続, 内部デ正則, 漸近展開 (a) ハ (t, λ) が (6) ヲ満足

シナカラ $(\infty, \infty) = \text{近ザク時成立スル。}$

5° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t, \Delta)$ ガ $\Delta = \text{関シテ}$
 $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。(2)ハ

$$(7) \quad \tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, \quad \sigma \leq \sigma_0, \quad |\Delta| \leq \Delta_0.$$

= 於テ一様収斂, (3)ハ

$$(8) \quad \tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, \quad \sigma \rightarrow -\infty$$

ノトキ成立スル。

6° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(x, y)$ ガ $x = \text{関シテ}$
 $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。 $f(x, y)$ ハ $x=y=0$ デ
正則デ

$$f(x, y) = \sum a_{j, k} x^j y^k$$

トナル。

場合ノ分ケ方 λ ノ値ニ依ッテ次ノヤウニ場合ヲ
分ケル。

(i) $\mu - \nu \tan \theta > 0$, λ キ正ノ整数.

(ii) $\lambda = \text{正ノ整数}.$

(iii) $\mu - \nu \tan \theta = 0$

(iv) $\mu - \nu \tan \theta < 0$, λ キ負ノ有理数.

(v) $\lambda = \text{負ノ有理数}$

θ ハ θ_1, θ_2 ノ間ノ値デアール。(i), (ii), (iii), (iv), (v)ノ中
カテ一ツ, $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ ノ中カテ一ツ取り出シテ組
合セルコトニヨッテ 30個ノ場合ヲ生ズル。ソレヲ $(I, i, 1),$
 $(I, i, 2), \dots$ ア表ス。