OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, Ⅶ
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 91, p. 5-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74328
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

403. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, VII

福原満洲雄(北大)

大体ニ於テ豫期シタ結果ニ達シタコトハ數物ノ年會デ述ベタ通リデアルカラ，前回ノ予定ヲ変更シテ整頽シタ形ニ於テ結果ノ紹介ヲ証明抜キデ述ベヨウト思フ。

特異点(I)

(A) $$x\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ニ於テ $f(x,y)$ ガ

(a) $$f(x,y)\sim\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}x^jy^k \quad (a_{00}=0,\ a_{01}=\lambda\neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル場合カラ始メル。コレハ今迄ニ最モヨク研究サレタ場合デアルカラ，考ヘ直ス必要ハナイカモ知レナイガ，理論的統一ノ立場カラ述ベテ置イタ方ガヨイヤウニ思フ。

形式的ノ計算　展開式(a)ガ何ヲ意味スルカヲ問題トシナイデ唯形式的ノ計算ニ依テ得ラレル結果ヲ先ニ述ベ

テ置ク。

形式的ノ解

$$\alpha)\quad y\sim\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x^j$$

ヲ求メル。コレヲ(A)ニ入レテ x^j ノ係数ヲ比較スルコトニヨリ

$$(j-\lambda)\alpha_j=P_j(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_j(\alpha)$ ハ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_{j-1}$ ノ整多項式デアル。故ニ j ガ正ノ整数デナケレバ α_j ハ唯一通リニキマル。

$$y=\alpha_1 x+\cdots\cdots+\alpha_{N-1}x^{N-1}+z$$

ト置イテ，z ガ満足スル方程式ヲ

$$(B)\quad x\frac{dz}{dx}=g(x,z)$$

ト書ケバ

$$(\beta)\quad g(x,z)\sim\sum b_{jk}x^j z^k$$
$$b_{j0}=0\quad(j<N),\quad b_{01}=\lambda$$

トナル。

勝手ナ常数 C ヲ含ム形式的ノ解

$$\beta)\quad y\sim\sum\alpha_{jk}x^j(Cx^\lambda)^k\quad(\alpha_{00}=0,\ \alpha_{01}=1)$$

ヲ求メル．コレヲ(A)ニ入レテ $xC^m(Cx^\lambda)^n$ ノ係数ヲ比較スルコトニヨリ

$$(m+(n-1)\lambda)\alpha_{mn}=P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk}（$j\leqq m$, $k\leqq n$ 但シ α_{mn} ヲ除ク）ノ整多項式デアル。故ニ λ ガ正ノ整数又ハ負ノ有理

数デアル場合ヲ除ケバ α_{mn} ハ唯一通リニキマル。M ハ負デナイ整数ノ対カラ成ル有限集合デ，(m,n) ガ M ニ属スレバ $j \leqq m$，$k \leqq n$ デアルヤウナ (j,k) モ M ニ属スルモノトスル。

$$y = \sum_{M} \alpha_{jk} x^{j} (Cx^{\lambda})^{k} + z$$

ト置イテ z ガ満足スル方程式ヲ

$$(C) \quad x\frac{dz}{dx} = g(x, Cx^{\lambda}, z)$$

ト書ケバ

$$(c) \quad g(x,\xi,z) \sim \sum b_{lmn} x^{l} \xi^{m} z^{n}$$

$$b_{lm0} \ ((l,m) \in M), \quad b_{001} = \lambda$$

トナル。

λ が正ノ整数デアル場合ニハ形式的ノ解

$$(\gamma) \quad y \sim \sum \alpha_{jk} x^{j} ((\varkappa \log x + C) x^{\lambda})^{k} \quad (\alpha_{00}=0, \alpha_{01}=1)$$

ヲ求メル。$x^{m}((\varkappa \log x + C)x^{\lambda})^{n}$ ノ係数ヲ比較スルコトニヨリ

$$(m+(n-1)\lambda)\alpha_{mn} + (n+1)\varkappa \alpha_{m-\lambda, n+1} = P_{mn}(\alpha)$$

ヲ得ル。$P_{mn}(\alpha)$ ハ α_{jk} ($j \leqq m$, $k \leqq n$ 但シ α_{mn} ヲ除ク）ノ整多項式デ，添字ニ負数ノアル α_{jk} ハ 0 トスル。故ニ $m = 0, 1, \cdots\cdots, \lambda-1$ ト置クコトニヨリ勝手ナ n ニ対シテ $\alpha_{0n}, \cdots\cdots, \alpha_{\lambda-1, n}$ ガ唯一通リニキマル。$m=\lambda$, $n=0$ トシ，$\alpha_{01}=1$ ニ注意スレバ $\varkappa = P_{\lambda 0}(\alpha)$ ヲ得ル。$\alpha_{\lambda 0}$ ハ勝手ナ値ヲ取ルコトガ出来ルガ，ソレヲ C ト一緒ニスルコ

トが出來ルカラ混雑ヲ避ケルタメ C ヲ勝手ナ常数トシ $\alpha_{\lambda 0}=0$ トスル。 $\alpha_{\lambda 0}, \cdots\cdots, \alpha_{\lambda, n-1}$ がキマッタナラバ、$m=\lambda$ ト置クコトニヨリ α_{mn} がキマル。一般ニ α_{jk} ($j<m$ 又ハ $j=m$, $k<n$ 但シ $m>\lambda$, $n\geqq 0$) ガ求マッヌナラバ α_{mn} がソレカラ唯一通リニキマル。

$$y=\sum_{j+\lambda k<N} \alpha_{jk} x^j (\alpha \log x + C) x^{\lambda})^k + z$$

ト置キ z が満足スル方程式ヲ

(1) $$x\frac{dz}{dx}=g(x,(\alpha \log x+C)x^{\lambda}, z)$$

ト書ケバ

(2) $$g(x,\xi,z)\sim \sum b_{lmn} x^l \xi^m z^n$$

$$b_{lm0}=0 \quad (l+\lambda m<N), \quad b_{001}=\lambda$$

トナル。

λ が負ノ有理数デアル場合ガ残ッテヰルガ、此ノ場合ニハ形式的ノ解ガ大シテ重要ナ意味ヲ持タナイカラ省ク。

<u>假定ノ取リ方</u> (a) ニ関スル假定ヲ成ルベク弱イ所カラ出発シテ $f(x,y)$ ガ $(0,0)$ デ正則トイフ所マデ次第ニ強クシテ行キ、其ノ結果 (A) ノ解ニドレダケノ影響ガ現ハレルカヲ見ル。

$$f(e^t, e^{\Delta})=\mathcal{F}(t,\Delta)$$

ト置キ $\mathcal{F}(t,\Delta)$ ハ考ヘテヰル範囲デ一價ト假定スル。$f(x,y)$ ハ $(0,0)$ ノ近傍デ多價函数デアッテモ差支ヘナイ。

$$t=\sigma+i\tau,\quad \lambda=p+iq$$

ト置ク。

1° $\mathcal{F}(t,\lambda)$ ハ

(1) $\begin{cases}\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0\\ q_1+p\tan\omega_1<q<q_2+p\tan\omega_2,\ p<p_0\end{cases}$

デ連続デ，漸近展開 (a) ハ (t,λ) ガ (1) ヲ満足シナガラ (∞,∞) ニ近ヅクトキ成立スル。

2° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t,\lambda)$ ガ λ ニ関シテ正則デアルトイフ假定ヲ加ヘル。

3° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t,\lambda)$ ガ λ ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルトイフ假定ヲ加ヘル。

$$\mathcal{F}(t,\log y)=F(t,y)$$

ト置ケバ $F(t,y)$ ハ $y=0$ デ正則デ

(2) $F(t,y)=\sum F_n(t)\,y^n$

(3) $F_n(t)\sim\sum a_{jn}e^{jt}$

トナル。(2) ハ

(4) $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_0,\ |y|\leqq\Delta_0$

ニ於テ一様収斂，(3) ハ

(5) $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\to-\infty$

ノトキ成立スル。

4° $\mathcal{F}(t,\lambda)$ ハ

(6) $\begin{cases}\tau_1+\sigma\tan\theta_1\leqq\tau\leqq\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\ \sigma\leqq\sigma_0\\ q_1+p\tan\omega_1\leqq q\leqq q_2+p\tan\omega_2,\ p\leqq p_0\end{cases}$

デ連続，内部デ正則，漸近展開 (a) ハ (t,λ) ガ (6) ヲ満足

シナガラ (∞, ∞) ニ近ヅク時成立スル。

5° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $\mathcal{F}(t, \lambda)$ ガ λ ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。(2) ハ

(ア) $\tau_1 + \sigma \tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2 + \sigma \tan\theta_2$, $\sigma \leqq \sigma_0$, $|y| \leqq \Delta$。

ニ於テ一様收斂, (3) ハ

(イ) $\tau_1 + \sigma \tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2 + \sigma \tan\theta_2$, $\sigma \to -\infty$

ノトキ成立スル。

6° 前ト同ジ假定ノ上ニ更ニ $F(t, y)$ ガ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ假定スル。$f(x, y)$ ハ $x = y = 0$ デ正則デ

$$f(x, y) = \sum a_{\lambda\mu} x^{\lambda} y^{\mu}$$

トナル。

<u>場合ノ分ケ方</u> λ ノ値ニ依ッテ次ノヤウニ場合ヲ分ケル。

(i) $\mu - \nu \tan\theta > 0$, λ ガ正ノ整数.

(ii) λ ニ正ノ整数.

(iii) $\mu - \nu \tan\theta = 0$

(iv) $\mu - \nu \tan\theta < 0$, λ ガ負ノ有理数.

(v) λ ニ負ノ有理数

θ ハ θ_1, θ_2 ノ間ノ値デアル. (i), (ii), (iii), (iv), (v) ノ中カラ一ツ, 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° ノ中カラ一ツ取リ出シテ組合セルコトニヨッテ 30 個ノ場合ヲ生ズル。ソレラヲ (I, i, 1), (I, i, 2), ------ デ表ス。