



Title	組合函数方程式ニ就イテ（Ⅰ）（混合体ノ函数方程式ノ解ニツイテ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 91, p. 22-32
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74332
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

407. 組合函数方程式 = 就イテ (I)

(混合体ノ函数方程式ノ解 = ツイテ)

北 川 敏 男 (阪大)

§1. X, Y ハ 或ル集合 M ノ 任意ノ元, α ハ 區間 $[0, 1]$

= 属スル任意ノ實数ナルトキ, $F(X, Y, \alpha)$ ハ又 M ノ元ヲ表ハストスル。今茲ニ函数方程式

$$F(F(X, Y, \alpha), F(X, Y, \beta), \gamma) = F(X, Y, A(\alpha, \beta, \gamma)) \text{ ----- (I)}$$

ガ定義域ニ於テ成立シタスル。Hニ關シテ次ノ條件ガ充サレテキルトスル。

(II) M カラ任意ノ二ツノ元 X°, Y° ヲトルトキ $F(X^\circ, Y^\circ, \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) = 對シテ次ノ如キ一對一ノ *Abbildung* のガ存在スル, 即チ

$$\phi \{ F(X^\circ, Y^\circ, \alpha) \} = \alpha \text{ ----- (2)}$$

(III) 任意ノ X, Y = 對シテ

$$F(X, Y, 1) = X \text{ ----- (3)}$$

$$F(X, Y, 0) = Y \text{ ----- (4)}$$

又 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ = 關シテ次ノ假定ガ充タサレテキルトスル。

(IV) (i) $\text{Min}(\alpha, \beta) \leq \delta \leq \text{Max}(\alpha, \beta)$ ナル如キ任意ノ数 δ = 關シテ

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \text{ ----- (5)}$$

トナル如キ γ ハ一ツ面シテ唯一ツ存在スル。

(ii) $\alpha > \beta$ ナルトキ = ハ, $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ γ ノ純單調増加函数デアリ

(iii) $\alpha < \beta$ ナルトキ = ハ, $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ γ ノ純單調減少函数デアル。

(iv) 任意ノ α 及ビ γ = 對シテ

$$A(\alpha, \alpha, \gamma) = \gamma \text{ ----- (6)}$$

(v) $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ハ各変数 α, β, γ = 關シテ連続ガ

アル。

K. Rother⁽¹⁾ハ偏微分方程式ノ解ヲ利用スルコト
=ヨリ,

$$F(X, Y, \alpha) = \sigma^{-1} \{ \sigma(X) g(\alpha) + (1 - g(\alpha)) \sigma(Y) \} \text{----- (7)}$$

トシテ表ハサレルト云フコトヲ証明シタ。以下ニ於イテハ,
微分可能性ヲ假定セズ, 以上ノ條件 (I) - (V) = 加フル =

(VI) Wiener Proportionalitätspostulate 任意
ノ實數 m ($0 \leq m \leq 1$) = 對シテ

$$mA(x, y, \alpha) = A(mx, my, \alpha) \text{----- (8)}$$

並ビニ

$$(VII) \quad A(0, 1, \alpha) = 1 - \alpha, \quad A(1, 0, \alpha) = \alpha \text{----- (9)}$$

ナル二條件ヲ以テシテ

$$F(X, Y, \alpha) = \sigma^{-1} \{ \alpha(X) \alpha + \sigma(Y) (1 - \alpha) \} \text{----- (10)}$$

トナルコトヲ証明スル。⁽²⁾

(1) K. Rother: Über die Lösung einer Funktionsgleichung
aus der Theorie der Mischkörper. Monats. d. Math.
u. Phys. 40 (1933). 尚問題ノ函数方程式ニ関スル物理學上
ノ文献。例ヘバ Lichteneker, 研究等ハ, コノ論文ノ脚註ヲ
參照。

(2) コノ函数方程式ハ本誌 28号 (85番) ナ提出シタコトガアル。
Rotherノ得タ結果ヲ, 微分可能ノ假定ナシニ得ルコトガ目標
ナアルカラ。假定 (VI) 及ビ (VII) $A(0, 1, \alpha) = 1 - \alpha$ ヲ最後ニナツテ
採ニ立テル証明方針ヲ追ム。Lichteneker, logarithmische
Mischregelヲ導クノハ, (VI), (VII)ノコトハ
假定セネバナラヌコトヲ附キシテオク。

§2. $A(x, y, \alpha)$ = 関スル函数方程式: 今 $M =$
 於イテ任意 $= X^0, Y^0$ ヲトリ, $F(X^0, Y^0, \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) ノ
 全体ヲ $M(X^0, Y^0)$ デ示ス。 $X, Y \in M(X^0, Y^0)$ ナリト
 シテ

$$B(x, y, \alpha) = \sigma\{F(\sigma(x), \sigma(y), \alpha)\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{但シ } \sigma(X) = x, \quad \sigma(Y) = y \dots\dots\dots (12)$$

トオク。

関係 (11) ヲ用ヒ, (I) ヲ $B(x, y, \alpha)$ 並ビ $= A(\alpha, \beta, \gamma)$
 = ツイテ書きカヘルトキ容易 =

$$B(x, y, \alpha) = A(x, y, \alpha) \dots\dots\dots (13)$$

並ビ =

$$A(A(x, y, \alpha), A(x, y, \beta), \gamma) = A(x, y, A(\alpha, \beta, \gamma)) \dots\dots (14)$$

ヲ得ル。依ツテ

$$A(x, y, \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) y \dots\dots\dots (15)$$

ヲ証明スルベヨイ。又 (III) カラ

$$A(x, y, 1) = x, \quad A(x, y, 0) = y \dots\dots\dots (16)$$

ヲ得ルコトヲ注意シテオク。

§3. 記号ノ導入並ビ = 基本関係 記述ヲ簡明 =
 スルタメ

$$A(0, 1, \gamma) = \gamma' \dots\dots\dots (17)$$

$$A(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} x, & y \\ \alpha, & \alpha' \end{pmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

ト置ク。 α' ハ $\alpha =$ ヨリ一意 = 決定サレルモノデアルカラ
 右辺 = α' ナル変数ヲ加ヘタコトが差支ヘナイ。言フマデモ

+7^W

$$(\gamma')' = \gamma, \quad 1' = 0, \quad 0' = 1 \text{ ----- (19)}$$

記法 (18) をモツテ混合法則 (I) を書き表はせば

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x & y \\ (\alpha \beta) & (\alpha \beta)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \text{ ----- (20)}$$

特 = , $x=0, y=1$ トオキテ

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}' \text{ ----- (21)}$$

(21) を (20) の右辺 = 代`入シテ

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x & y \\ (\alpha \beta) & (\alpha' \beta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \text{ ----- (22)}$$

茲 = 於イテ更 = . 次 , ニツノ記号ヲ導入スル。

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} = x \circ \alpha \text{ ----- (23)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} = y \cdot \alpha' \text{ ----- (24)}$$

茲 = 便宜上 次 , 概念ヲ導入スル ;

定義 (I) (半群 Halbgruppe) 集合 G , 元 a, b, c

----- デ表ハストキ

1) a, b が G , 任意ノ元ナルトキ , ab ナル G , 元ガ

(II) 假定 (VII) カラ $\gamma' = 1 - \gamma$ ナルカラ $(\gamma')' = \gamma$ ナル。シカシ,
ユノ假定ナシデ $(\gamma')' = \gamma$ ナルコトヲ注意シタイ。

一意的存在スル。

$$2) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$3) \quad a \cdot e = e \cdot a = a \text{ ナル如キ元 } e \text{ が } G = \text{存在スル。}$$

4) G ノ元ノ間ニ記号 $< (\text{又ハ}) >$ デ表ハサレル順序ナル関係が成立シ、次ノ法則ニ従フ。

a, b が G ノ元ナラバ、次ノ三ツノ場合ノウチ一ツ面シテ唯一ツノ場合ノミガオコル。

$$a > b \text{ 又ハ } a = b \text{ 又ハ } a < b$$

$$(a > b \text{ ノコトヲ } b < a \text{ トモカク})$$

$$5) \quad a \geq b \text{ 且ツ } a > e \text{ ナラバ、又ソノトキニ限り。}$$

$a = bx$ 或ハ $a = yb$ ナル如キ G ノ元 x 或ハ y が夫々一意的存在スル。⁽¹⁾

然ルトキ

補助定理 I. 區間 $(0, 1)$ ニ属スル實体ノ全体ハ、Composition $a \circ b$ 又ハ $a \cdot b$ ニツキ夫々半群ヲ形成スル。

証明: $a \circ b$ = ツイテ述ベル: 實數トシテ $a \geq b$ ナルニ從ヒ $a \leq b$ ナル關係アリトスル。然ルトキ 4) が成立、1) ハ自明、2) ハ $y = \beta = 0$ トシテ () カラ得ラレ、3) = 於ケル e トシテ 1) ヲ採用、5) ハ假定 II) ヨリ得ラレ、カク

(1) 彌永氏: 幾何學基礎論(III) 129頁ニテ半體(Halbkörper)ナル概念が導入ガレテキルノニ因ンデ假リニカク名ツケヌ。1) - 5) ノ間ニ、重複シタ條件ガアルカモ知レナイガ今ソレヲ問題トシナイ。

シテ定理が成リ立ッ。

補助定理II. 任意ノ x, α, β 並ビ $\gamma = \text{関シテ}$

$$\begin{pmatrix} x \circ \alpha & x \circ \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = x \circ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \text{----- (25)}$$

$$\text{並} = \begin{pmatrix} x \cdot \alpha & x \cdot \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \text{----- (26)}$$

証明: (22) = 於イテ, $y = 0$ トオケル (25)ヲ得, 又 (22) = 於イテ $x = 0$ トオキテ且ツ $\alpha' \neq \alpha$, $\beta' \neq \beta$ 書き改メルトキ (26)ヲ得ル。

系I. 任意ノ $x, \alpha, \gamma = \text{對シテ}$

$$(x \circ \alpha) \cdot \gamma = x \circ (\alpha \cdot \gamma) \text{----- (27)}$$

$$(x \cdot \alpha) \circ \gamma = x \cdot (\alpha \circ \gamma) \text{----- (28)}$$

証明: 夫々 (25), (26) = 於イテ $\beta = 0$ トシテ得ラレル。

補助定理III. 任意ノ $y, \beta = \text{對シテ}$

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} = (y' \cdot \beta')' \text{----- (29)}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} = (x' \circ \alpha)' \text{----- (30)}$$

$$\text{証明: } \begin{pmatrix} 1 & y \\ \beta & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1' & y' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}' \quad ((21) = \text{由ル})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & y' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}' \quad ((19) \text{ヲ用ヰル})$$

$$= (y' \cdot \beta')' \quad ((24) = \text{依ル})$$

同様ニシテ (21), (19) 並ビ (23) = 由リ (30)ヲ得ル。

§4. 逆元ノ導入並ビニ基本関係ノ表示 實數ノ大小関係トシテ $x > 0$, $x \geq y$ ナルトキニハ,

$$y = x \circ \delta \text{ ----- (31)}$$

ナル如キ, 區間 $[0, 1]$ ニ屬スル實數 δ が存在スル。今抽象的ニ x^{-1} ヲ導入シ, コレト δ ノ元トノ間ニ

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1 \text{ ----- (32)}$$

ナリトシ, 順序関係ハ

$$x \geq y \text{ = 應ジテ夫々 } x^{-1} \leq y^{-1} \text{ ----- (33)}$$

ナリトスレバ, (31)ニ於ケル δ ハ

$$\delta = x^{-1} \circ y \text{ ----- (34)}$$

デ與ヘラレル。

コノ記法ヲ用フルトキ, 補助定理 II. (25)ニ依リ

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \right) &= \left(x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \right) \\ &= x \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \delta \right) \\ &= x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}^{-1} \circ \delta \right) \end{aligned}$$

他方ニ於テ

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & 0 \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} \right) = x \circ \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha \circ \gamma & (\alpha \circ \gamma)' \end{pmatrix}$$

止、ニツ、Ausdruck = 於イテ x ハ任意デアルカラ

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}^{-1} \circ \delta \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \alpha \circ \gamma & (\alpha \circ \gamma)' \end{pmatrix} \quad \text{----- (35)}$$

§5. Topologieノ導入並ニ半群ノ表示。

茲ニ到リ始メテ假定 (V)ヲ用ヰテ、先ヅ次ノ結果ヲ得ル。

補助定理 IV. 任意ノ $x, \alpha \in G$ ニ對シテ常ニ

$$x \circ \alpha = x \cdot \alpha \quad \text{----- (36)}$$

而シテ、區間 $[0, 1]$ ヲソレ自身ニナル Topologische Abbildung λ が存在シテ次ノ性質ヲモツ。

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \quad x \circ \alpha = \lambda^{-1}(\lambda(x) \lambda(\alpha)) \\ 2^\circ \quad \lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1 \end{array} \right\} \quad \text{----- (37)}$$

証明: 假定 (V)ニヨリ、Composition $x \circ \alpha$ ニ關スル半群 G ハ、區間 $[0, 1]$ ニ於ケル實数ノ Multiplikation = stetig isomorphニナル。ソレ故

$$x \circ \alpha = \lambda^{-1}(\lambda(x) \lambda(\alpha))$$

トカ、レ、 2° ヲモミタス。同様ニシテ

$$x \cdot \alpha = \mu^{-1}(\mu(x) \mu(\alpha)) \quad \text{----- (38)}$$

トナリ、 $\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$ トナルヌヲ Topologische Abb. μ が存在スル。今

$$\lambda(\mu^{-1}(x)) = p(x) \quad \text{----- (39)}$$

ナル Topologische Abb. ヲ導入スレバ、系 Iニヨリ

$$p(x\alpha) p(\gamma) = p(x p^{-1}(p(\alpha) p(\gamma))) \quad \text{----- (40)}$$

ヲ得ル。右辺ハ α, γ ニ關シテ對稱ナルカラ

$$p(x\alpha)p(\gamma) = p(x\gamma)p(\alpha) \text{ ----- (41)}$$

$\alpha = 1$ トオイテ

$$p(x)p(\gamma) = p(x\gamma) \text{ ----- (42)}$$

$p(0) = 0, p(1) = 1$ トナル如キ連結解ハ

$$p(x) = x^k \text{ ----- (43)}$$

コレカラ (36)ヲ得ルノデアル。

補助定理 V. 今, 補助定理 IV = 於イテ導入シタルヲ用キテ

$$A^*(x, y, \alpha) = \lambda A(\lambda^{-1}(x), \lambda^{-1}(y), \lambda^{-1}(\alpha)) \text{ ----- (44)}$$

ヲ導入スレバ, 性質 (I) - (V) ノミナラズ, (VI) ヲモ満足スル。而シテ

$$A^*(0, 1, \alpha) = 1 - k(\alpha) \text{ ----- (45)}$$

トオケバ, $k(0) = 0, k(1) = 1$ トナリ, 純單調増加連続デアリ。 $A^*(x, y, \alpha)$ ハコノ函数 $k(\alpha)$ ヲ用キルトキ次ノ如ク表ハサレル。

(i) $y \geq x$ ナルトキニハ

$$\begin{aligned} A^*(x, y, \alpha) &= y A^*\left(\frac{x}{y}, 1, \alpha\right) \\ &= y k^{-1}\left[k\left(\frac{x}{y}\right)\alpha + 1 - \alpha\right] \text{ ----- (46)} \end{aligned}$$

(ii) $y \leq x$ ナルトキニハ

$$\begin{aligned} A^*(x, y, \alpha) &= x A^*\left(1, \frac{y}{x}, \alpha\right) \\ &= x k^{-1}\left[k(\alpha) + k\left(\frac{y}{x}\right) - k(\alpha)k\left(\frac{y}{x}\right)\right] \\ &\text{----- (47)} \end{aligned}$$

§ 6. 假定 (V), (VI) ノ導入並ニ証明ノ完了。

假定 (V) 及ビ (VI) $A(0, 1, \alpha) = 1 - \alpha$ ハ今マデ全然使ツテ

ナカッタ。之ヲ説ケルト

$$\lambda(x) = x, \quad h(x) = x$$

ト、トツテヨイコトガナル。ソレ故ニ、(44), (46) カラ

$$\begin{aligned} A(x, y, \alpha) &= x A\left(1, \frac{y}{x}, \alpha\right) \\ &= x\alpha + (1-\alpha)y \end{aligned}$$

ヲ得ル。コレヲ証明ハ完了シタ。

後記： 假定 (V), (VI) $A(0, 1, \alpha) = 1 - \alpha$ ガナケレバ、(46), (47) 並ビニ (I) = ヨリ、 $h(x)$ = 関スル可成リ長イ函数方程式ヲ得ル。ソレハ、 $h(x)$ = 関シテーツノ新シイ條件ヲ映ヘテキルコトハ確カデアアル。が、ソレヲ直接考究シテ $h(x) = x$ ヲ得ルコトハ、筆者ニハ出来ナカッタ。残サレタ問題ハ、即チ (35) ヲ h 函数ヲ表示シテ $h(x) = x$ ヲ導クノアル。又 $h(1-h(x)) = 1-x$ トナルコトヲ注意シテオキタイ。