



Title	等積変換ニ就イテ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 92, p. 4-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74335
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

410. 等積変換 = 就イテ

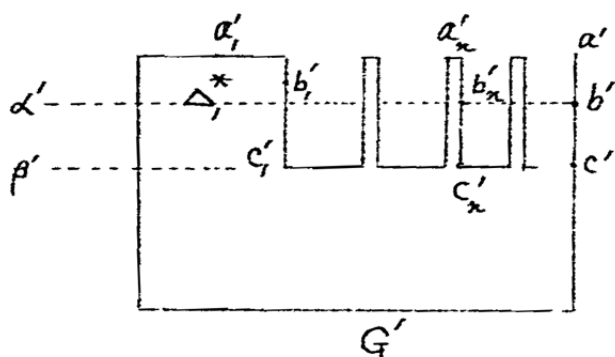
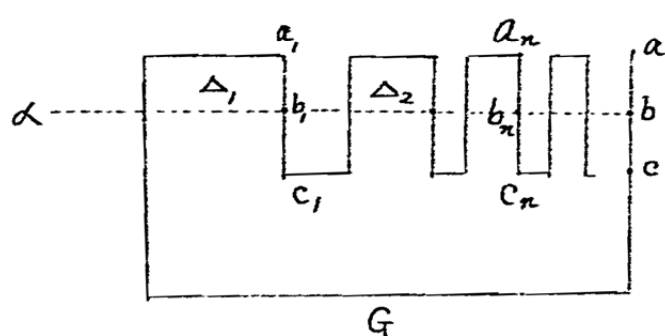
寺 阪 英 孝 (阪大)

別 = 目新ラシイ問題デモアリマセンが、諸賢ノ御教示ヲ
アホヤ度イト思ヒマスノガ木紙ヲ拝借シマス。

ユークリッドノ R^n 空間内ノニツノ領域 G, G' 間 (又ハ
ソノ閉包 $\overline{G}, \overline{G'}$ 間) = 等型変換 (*homöomorphe Abb.*)
 T がアツテ、 T = ヨリ G 内ノ凡テノ開 (又ハ閉) 集合 M が
 G' 内ノ M ト等積ナ集合 $M' =$ 對應スルトキ、 T ヲ等積変換
トイヒマスト、問題ハ (1) G, G' が等型 (*homöomorph*)
デ且ツ等積ナラベスカル T が存在スルカ、(2) G, G' ノ境界

デノ 對應 が指定サレタ トキ = 省カル ↓ が存在スルカ、ト云フノデス。平面ノ場合或ハコレヲ拡張シテ曲面ノ場合ハ問題が容易 = ナリマスガ、三次以上ノ場合ハ判リ兼ねマスノデ、御教示願ヒタイト思フノデス。コノデハ兎モ角平面ノ場合ヲ考ヘルコト = 致シマス。

§1. 定理1 面分が等積デアツテモ等積的 (等積変換が存在) トハ限ラヌ。



圖ノヨウナ $\overline{ac}$, $\overline{a'c'}$ ノミガ nicht, erreichbar + 境界線デア
ル面分 G, G' ヲ考ヘル。
 G 内デ α 直線ヨリ上ノ
小面分ヲ $\Delta_1, \Delta_2, \dots$
 $\Delta_n, \dots$ トシ、
 G' 内デハ β' 直線以
上ノ小面分ヲ $\Delta_1^*, \Delta_2^*,$
 $\Delta_n^*, \dots$

$$\text{且 } A_n = \Delta_n + \Delta_{n+1} + \dots$$

$$A_n^* = \Delta_n^* + \Delta_{n+1}^* + \dots$$

トオイタ時, ソノ面積ノ比ガ $\frac{|A_n^*|}{|A_n|} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ トナル

ヨウ = シテオク。

↑ヲ $\overline{G} \rightarrow \overline{G'}$ + ル等型変換トスレバ $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b,$
 $c_n \rightarrow c$ ノ如キ点列 $a_n, b_n, c_n =$ 對スル a'_n, b'_n, c'_n ハ

$a'_n \rightarrow a', b'_n \rightarrow b, c'_n \rightarrow c$ トナリ, n が十分大ナラバ ($n \geq N$)

$\overline{a'_n b'_n}$ ナル線分ハ大体 α' 直線ノ上部ニ來テ了フ。ヨツテ

$\Delta_n (n \geq N)$ ノ寫像 Δ'_n ハ α' 直線ノ大体上部ニ來。從ツテ

$$\frac{|A_n^*|}{|A_n|} \rightarrow 0 \text{ カラ } \frac{|A'_n|}{|A_n|} \rightarrow 0 \text{ トナル } (A'_n = \Delta'_n + \Delta'_{n+1}$$

+ \dots\dots\dots) (A_n^* が同ジ n , A'_n フ含ムワケデハナイガ, n が

十分大ナラバ, アル $m = \text{ツキ}$ $A'_n \subset A_m^*$ 。ソレ以後ハ $A'_{n+p} \subset$

A_{m+p}^* トナル)。ヨツテ T ハ等積的デハアリ得ナイ。

§2. **定理2** 測度 0 ノ Jordan 曲線ヲ囲マレタ面
分ガ等積ナラバ Jordan 曲線上ノ對應 (勿論等型的)
ヲ指定シテモ等積変換ヲ造リ得ル。

コノ証明ハ二通アツテ、一ツハ次ノ補助定理ヲ用キル。

補助定理 一雙ノ多角形ガ等辺, 等積ナラバ, ソ
ノ各辺ガ *affin* = 對辺スルマデナ等積変換ガ造レル。
(多角形ハ凹ガモヨイ。)

得ラレル等積変換ハ *stickweise* = *affin* = 出來

ル。コノ証明ハ圖ニ示シタ初等

変換 ($AA' \parallel BC \rightarrow |\Delta ABC| = |\Delta A'BC|$)

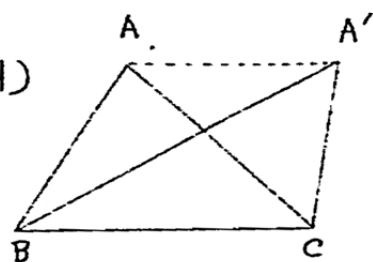
ヲ有限回運用スレバヨイ。與ヘラレ

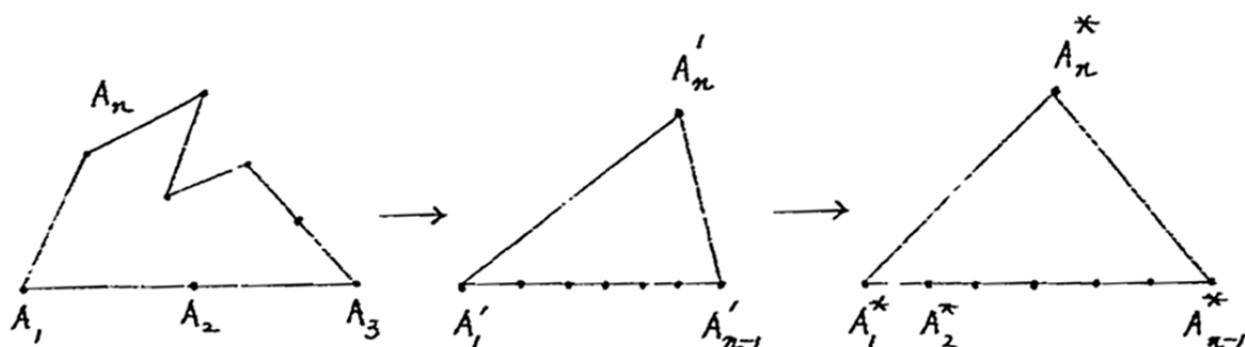
タ多角形カテ順々ニ初等変換ヲ適用

シテ等積ナ三角形ヲ造リ、コレヲ更

ニ標準型化スル。(略図参照。標準型デハ $A_1^* A_2^* = A_2^* A_3^* = \dots$

$\dots = I$)



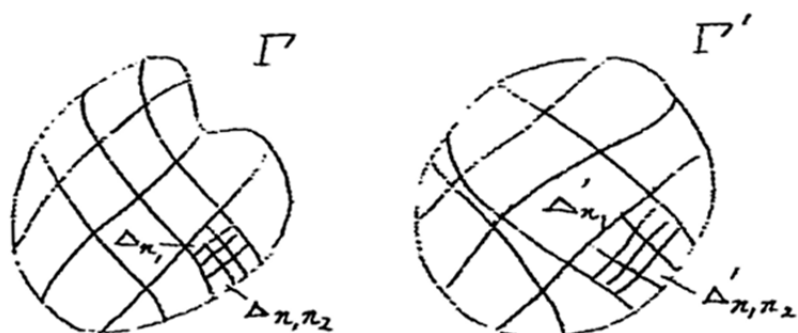


定理 2 を証明スルニハ Jordan 曲線ノ内部カラコレ
ヲ多角形ニ接近セシメ、標準型 (例ヘバ正方形) ノ内部ニ順
ニ寫像シテユケルヨイ。

定理 2 ノ別証ハ荒マシノ所次ノヨウニスル。

測度 0 ノ Jordan 曲線 Γ, Γ' ニ囲マレタ面分ガ等積ダ
ヲ示トシ、 Γ, Γ' 上ノ等型對應ヲ指定シテオク。

(1) Γ ノ内
部ヲ十分細カク
Polygonzug
ニ分ケル。 Γ' ノ
内部ニ polygon-



zug ナラケテ (コノ分ケ方ハ Zellenkomplex ト考ヘテ
両者ガ isomorph = 對應シタルヨウニシテ置ク) Γ ノ細
面分ト對應サスベキモノヲ等積ニシテオク。 ($|\Delta_{n_1}| = |\Delta'_{n_1}|$)

(2) 次ニ Γ' ノ各 Δ'_{n_1} ヲ十分細カク分ケル。 Γ ニコレ
ニ應ジテ細分シ、對應スベキモノノ面積ヲ等シクスル。
 $|\Delta_{n_1n_2}| = |\Delta'_{n_1n_2}|$ 。

(3) 次ニ Γ ノ $\Delta_{n_1n_2}$ ヲ細分シ、次ニ又 Γ' ノ細面分ヲ細
分シ、順繰リニ同様ノ作図ヲスル。

細分ト細面分ノ對應ヲ *isomorph* = マレバ最後 = 得ラレ

$$\prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \rightleftharpoons \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \text{ ナル對應} = \text{ヨリ } \Gamma, \Gamma'$$

面分間ノ一對一連續即チ等型的ナ寫像が造レルシ、コレハ又
作図 = ヨツテ等積変換 = モナル。

補足 *Jordan* 曲線 Γ, Γ' ノ測度ハ 0 ナクテ
モ等シケレバ等積変換カツクレルケレドモ、 Γ, Γ' 上デ
ノ對應ハ *Teilbogen* ノ測度が一致スルヨク = 指定シテオ
カナケレバナラナイ。

§3. 面分が單一連結デナクテモ、無限次連結デアツテ
モ、境界点ガ凡テ *erreichbar* デアリ、從ツテ有限個ノ
Jordan 曲線 (特 = 多角形) デ囲マレタ有限連結ノ面分
デ一様 = 接近出來ル場合 = ハ、境界ノ測度ハ 0 デアルコ
トト、面分ガ等積ナルコトトカラ、等積変換ノ存在ガ証
明サレル。ソレ = ハ §2 ノ定理、或ハ特 = 補助定理ヲ用ヒレ
バヨロシイ。

§4. 次 = 等型ナ曲面ガ更ニ等積ナラベ等積変換ガ存
在スルカト云フノデアルガ、先ガ最簡ナ場合トシテ曲面 F が
閉デタ円盤 K ト等型ナ場合ヲ考ヘル。 $K \rightleftharpoons F$ ナル對應ヲ f
トスルト、 K 内ノ開或ハ閉集合 $O \subset K$ = 對シ $f =$ ヨツテ F 上
= 對應スル部分ノ面積 (*Lebesgue* デ測ル) ヲ $\mu(O)$ トス
レバ、 μ ハ f = ヨツテ定マツタ加法函数デアル。

ソコデ今、 F ヲ等積 = 寫像シヨク トスル平面上ノ面分
—— 例ヘバ面積ガ F ノソレ = ヒトシイヨクナ円 K' トスル ——

ヲ考ヘ、 $K' = K$ ヲ等積的ニ寫像シ、 $0 \subset K =$ 對スル K' 内ノ面分ヲ $0'$ トシタトキ $0'$ ノ面積ガ $|0'| = \mu(0)$ ノヨウニ出來レバ、コレガ K' ト F トノ間ニ等積変換ガ附イタコトナル。

コノ要求ヲ充タス変換 $K \rightarrow K'$ ヲツクルニハ定理2ノ別証ノ方法ヲ用ヒ、先ガ K ヲ多角形(又ハJordan曲線)ニヨリ細カリZellenニワケテ置キ、 K' ヲ同様ニ細カクキツタニ、 $Zellenkomplex$ ニ對應トシテisomorphニ對應セシメ、且ツ K ノZelle k_n (面分或ハソノSeite)ニ對スル K' ノZelleヲ k'_n トシタトキ $|k'_n| = \mu(k_n)$ ナルヨウニシテ置ク。次ニ K' ノZellenkomplexヲ細分シテソノ各Zelleノ直径ヲ十分小ニナシ、 K ヲ細分シタニハ上述ノヨウニisomorphニ對應サセル。コレヲ交互ニ繰リ返シテユケバ結局 K, K' 間ニ所要ノ對應ガエラレルカラ $K' \rightarrow K \rightarrow F$ ナル對應ニヨリ K' ト F トハ等積ニ對應スルコトトナル。

單一連結ノ閉曲面ヲ高々 abzählbar 加ヘタモノデハ同様ノコトガ云ヘルカラ、特ニ

定理3 *Geschlecht p ノ等積ニJordan Flächenハ互ニ等積的(等積変換存在)デアール。*

平面ノ場合ニ面分ガ等積的デアラタメノ必十條件。 R^n ($n \geq 3$)ノ場合ハ未解決デス。 R^n ノGebietヲPolyederガ接近セシメルコトガ平面ノ場合ノヤウニハ

ツキリ判 レバヨイノデスが。