



Title	組合函数方程式ニ就イテ (II) (所謂 Vektor-Raum ノーツノ Charakterisierungニツイテ)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 92, p. 14-27
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74337
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

412. 組合函数方程式 = 就イテ (II)

(所謂 *Vektor-Raum* , $\sim$, *Charakterisierung*
= ツイテ)

北川 敏男 (阪大)

§1. B -*Verknüpf.* 並 $\hat{=}$ B -*Verknüpf.* $*$, 導入
ニツ , 集合 M ト K トカアリ , M : 元ヲ 5 , K :
元ヲ α デ表ハストキ $\{5_n\}$, $\{\alpha_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ヲ
ル *Folgen* = 對シテ

$$\begin{bmatrix} 5_1, 5_2, \dots, 5_n, \dots \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

ハ又 M ノ一意 = 決ツタ元ヲ表ハシ , 次ノ諸性質ヲモツテキ
ルトスル。

(I) M = ハ一定ノ元 (n) ガアツテ (I) = 現ハレル 5_n
ノウチ , (n) ト一致シナイモノハ高々有限個デアル。

(II) $5_n = (n)$ デアレバ , $\{5_k\}$ ($k \neq n$)⁽¹⁾ , $\{\alpha_k\}$,
並 $\hat{=}$ α'_n ヲ如何ニトルトモ常ニ

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 5_1, 5_2, \dots, 5_{n-1}, (n) 5_{n+1}, \dots \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5_1, 5_2, \dots, 5_{n-1}, (n) 5_{n+1}, \dots \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'_n, \alpha_{n+1}, \dots \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ナレ關係ガ成立スル。

(1) $\{5_k\}$ ($k \neq n$) ノ意味ハ 5_n ヲ除イテハ , 知ラレテキ
ルトイフ意味デアル。

(III) 任意ノ $\{s_k\}$ ($k \neq n$) 並ニ $\{\alpha_k\}$ = 對シテ

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n+1} & \cdots \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & \textcircled{n} & s_{n+1} & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots \end{bmatrix} \cdots (3)$$

トナル如キ $\textcircled{n}$ ノ元ガハーツ而シテ唯一ツ存在スル。コレヲ 0
ヲ表ハス。

(IV) 任意ノ $\{s_n\}$ = 對シテ

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix} = \textcircled{n} \cdots (4)$$

(V) $s_n \neq \textcircled{n}$ ナラバ, $s, \{s_k\}$ ($k \neq n$) 及ビ $\{\alpha_k\}$ ($k \neq n$)
ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots \end{bmatrix} = s \cdots (5)$$

トナル如キ α_n ハーツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VI) $\alpha_n \neq 0$ ナラバ, $s, \{s_k\}$ ($k \neq n$) 及ビ $\{\alpha_k\}$
($k \neq n$) ヲ如何ニ與フルトモ

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots \end{bmatrix} = s \cdots (6)$$

ナル如キ s_n ハーツ而シテ唯一ツ存在スル。

(VII) 任意ノ Folge $\{s_n\}$ = 對シテ

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0 & \cdots \end{bmatrix} = s_n \cdots (7)$$

ナル如キ元 e が存在スル。

以上ノ諸性質ヲ有スルトキ (I) ヲ *B-Verknüpfung* ト稱シ $B(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{K}})$ デ表ハス。⁽¹⁾ 特ニ

$$(VIII) \quad \mathcal{M} = \hat{\mathcal{K}}, \quad \textcircled{n} = 0$$

且ツ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0 & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n & \beta_{n+1} & \cdots \end{bmatrix} = \beta_n \cdots \cdots (8)$$

ナル元 e が存在スル。

コノ條件ガ加ルトキ (I) ヲ $B^*-Verknüpfung$ トイヒ, $B^*(\mathcal{M})$ デ示ス。而シテ *runde Klammer* ヲ用キルコトニスル。

假定(I), $n > m$ ナルトキ, 常ニ $\zeta_n = \textcircled{n}$ ナル如キ m ガアリ、ソノトキ假定(II)ニヨリ, $\alpha_n (n > m) = \textcircled{n}$ ハ實質上無関係ニナルカラ、(I) ヲ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}_n \cdots \cdots (9)$$

デ表ハスコトニシヌ。

§2. Mischungsregel.

$B(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{K}})$ が次ノ性質ヲモツトスル。⁽²⁾

(1) 以下ノ議論ガ正シケレバ, *Mischungsregel* (§2) ノ假定, 下ニ於イテハ, (I) ハ言ヘジ *Bilinear Form* (?) ノヤウナモノデアルト言ヒ得ヌ。ソコデ頭文字ノ B ヲトツテ、假リニ斯ク名付ケルコトニシタ。

(2) ζ が $\mathcal{M}$ ノ任意ノ元, α, β が $\hat{\mathcal{K}}$ ノ任意ノ元ニ對シテ成立スルトイフ意味デアル。

$$\begin{aligned}
 (M) \quad & \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \end{array} \right]_n \quad \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \end{array} \right]_n \quad \dots \quad \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{array} \right]_n \\ \beta_1 & \quad \quad \quad \beta_2 \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \beta_n \end{array} \right]_n \\
 &= \left[\begin{array}{c} \zeta_1 \quad \quad \quad \zeta_2 \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \zeta_n \\ \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{2,n} \end{array} \right) \quad \dots \quad \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{array} \right) \\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \end{array} \right]_n
 \end{aligned}$$

コレヲ Mischregel ト稱スル。

定理 I. *Mischungregel* ヲ有スル $B(M, \mathcal{R})$,
 $B^*(\mathcal{R}) =$ 對シテ次ノ事實が成リ立ツ。

1°. $B^*(K) =$ 於イテハ, (Multiplikation) Folge
 $(\alpha\beta)_i$ ($i=1, 2, \dots$) 並ビ $=$ (Addition) $\alpha + \beta + \nu$
Composition が定義サレテ

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n \quad \dots \\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \quad \dots \end{array} \right) \\
 &= (\alpha_1 \beta_1)_1 + (\alpha_2 \beta_2)_2 + \dots + (\alpha_n \beta_n)_n + \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

トシテ表ハサレル。コレニ等、*Composition* ハ次
 ノ如キ性質ヲモツ

(i) *Composition* $(\alpha, \beta)_i =$ 關シテ 0 ヲ除イタガキハ一
 ツ群ヲツクル。e ガソノ *Einheit* デアル。

(ii) 任意ノ $i, j =$ 對シテ

$$((\alpha, \beta)_i \gamma)_j = (\alpha (\beta \gamma)_j)_i \quad \dots \quad (12)$$

(iii) $\mathcal{R}$ ハ *Composition* $\alpha + \beta =$ 關シテ一ツノ *kom-*
mutative gruppe ヲツクル。

0 ガソノ *Einheit* $= +\nu$ 。

$$(iv) (\alpha + \beta)\gamma)_i = (\alpha\gamma)_i + (\beta\gamma)_i \dots\dots\dots (13)$$

$$(\gamma(\alpha + \beta))_i = (\gamma\alpha)_i + (\gamma\beta)_i \dots\dots\dots (14)$$

2. $B(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{K}}) =$ 對シテハ

$\hat{\mathcal{K}}$, 任意, Element α ト $\mathcal{M}$, 任意, Element ζ ト, 間 = . Operation $(\alpha \cdot \zeta)_i$ が定義サレ $\mathcal{M}$, 元ヲ表ハシ又 $\mathcal{M}$, 元同志, 間 = Composition $\zeta_1 \oplus \zeta_2$ が定義サレテ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots\dots & \zeta_n & \dots\dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\dots & \alpha_n & \dots\dots \end{bmatrix} \\ = (\alpha_1 \cdot \zeta_1)_1 \oplus (\alpha_2 \cdot \zeta_2)_2 \oplus \dots\dots \oplus (\alpha_n \cdot \zeta_n)_n \oplus \dots\dots (15)$$

トシテ表ハサレル。コト = . 之レ等, Operation 乃至 Composition = n 次ノ如キ性質ガアル。

$$(v) (e \cdot \zeta)_n = \zeta \dots\dots\dots (16)$$

$$(vi) (\alpha \cdot \theta)_n = \theta \dots\dots\dots (17)$$

$$(vii) (0 \cdot \zeta)_n = \theta \dots\dots\dots (18)$$

(viii) Composition $\zeta_1 \oplus \zeta_2 =$ 間シテ $\mathcal{M}$ ハーツノ群ヲ表ハス。

$$(ix) \zeta_k = \sum_{\nu} (\alpha_{k,\nu} \cdot \zeta_{\nu}^{\circ})_{\nu} \quad (k=1, 2, 3, \dots\dots)$$

ナルトキ = ハ

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots\dots & \zeta_n & \dots\dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\dots & \alpha_n & \dots\dots \end{bmatrix} = \sum_k \left(\sum_{\nu} (\alpha_{\nu,k} \alpha_{\nu})_{\nu} \cdot \zeta_k^{\circ} \right)_k^{(1)} \dots\dots (19)$$

(1) $\sum$ ハ $\hat{\mathcal{K}}$ = 於ケル Addition $\alpha + \beta$, Summe ; $\sum$ ハ $\mathcal{M} =$ 於ケル Addition $\zeta \oplus \eta$, Summe トリトスル。

§2. 定理 I の証明.

補助定理 I. *Mischungsregel* が成立スルトキハ,
 $B^*(\mathcal{R})$ -Verknüpfung = 對シテ *Mischungsregel* が成立スル。

証明. 簡單ノタメ $n=2$ ノ場合 = ツイテ述ベル。

$$\left[\left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array} \right]_2 \right]_2 \left[\left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array} \right]_2 \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \delta_1 & \delta_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \delta_1 & \delta_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \right]_2 \quad \text{-----} (20)$$

$$= \mathcal{L}(\text{say})$$

ヲ考ヘル。コレハ, $B(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ = 關スル *Mischungsregel* = ヨリ。

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 \\ g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 \\ g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \quad \text{-----} (21)$$

= 等シク, 又

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \varepsilon_1 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_1 & \varepsilon_1 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_2 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 \\ g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \left[\begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_1 & \varepsilon_1 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_2 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 & \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \varepsilon_1 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \varepsilon_2 \end{array} \right)_2 \\ g_1 & g_2 \end{array} \right]_2 \quad \text{-----} (22)$$

= モ等シイ。

茲デ γ_1, γ_2 ハ 任意デアルカラ, $(\nabla) = \text{ヨリ}$ 。

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}_2 \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \left(\begin{pmatrix} \delta_1 & \varepsilon_1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \delta_2 & \varepsilon_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_2 \right) \end{pmatrix} \dots\dots (23)$$

ヲ得ル。コレ求ムル $B^*(\mathcal{K})$ = 関スル Mischregel デアル。
⁽¹⁾
 ル。

吾々ハ便宜上、次ノ記号ヲ導入スル。

$$\left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ e & e & \dots & e \end{matrix} \right]_n = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n \dots\dots (24)$$

$$\left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_k & \dots & \gamma_n \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \dots & 0 \end{matrix} \right]_n = (\alpha_k \cdot \gamma_k)_k \dots\dots (25)$$

然ルトキ

補助定理 II.

$$\left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_k & \dots & \gamma_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \dots & \alpha_n \end{matrix} \right]_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cdot \gamma_k)_k \dots\dots (26)$$

証明。簡單ノ $\gamma \times = n=2$ トシテオク。

$$\left[\left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{matrix} \right]_2 \left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{matrix} \right]_2 \right] = \left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ e & e \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ e & e \end{pmatrix}_2 \right) \end{matrix} \right]_2$$

コレ即チ

$$(\alpha_1 \cdot \gamma_1) \oplus (\alpha_2 \cdot \gamma_2)_2 = \left[\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \right]_2$$

(1) 前稿、組合函数方程式 = 就テ (I) (混合体ノ函数方程式 = ツイテ) = 於イテ、 $F(x, y, \alpha)$ ノ函数方程式カラ、 $A(x, y, \alpha)$ ノ函数方程式ヲ導キ出ストキ、コノ方法 = ハ依テナカツタガ、コノ方法ガモ全ク同様ニシテ出来ル。

ヲ示ス。アトハ *Induktion* ヲ施セバヨロシイ。

補助定理 III.

$$(5_1 \oplus 5_2) \oplus 5_3 = 5_1 \oplus (5_2 \oplus 5_3) \text{-----}(27)$$

証明. 定義 = ヨリ

$$\begin{aligned} (5_1 \oplus 5_2) \oplus 5_3 &= \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ e & e & 0 \end{array} \right]_3 \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ 0 & 0 & e \end{array} \right]_3 \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_3 \\ &\quad \left[\begin{array}{ccc} & e & \\ & & e \\ & & & 0 \end{array} \right]_3 \\ 5_1 \oplus (5_2 \oplus 5_3) &= \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ e & 0 & 0 \end{array} \right]_3 \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ 0 & e & e \end{array} \right]_3 \left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_3 \\ &\quad \left[\begin{array}{ccc} & e & \\ & & e \\ & & & e \end{array} \right]_3 \end{aligned}$$

然ル = *Mischregel* = ヨリ、コノニツハ共 =

$$\left[\begin{array}{ccc} 5_1 & 5_2 & 5_3 \\ e & e & e \end{array} \right]_3$$

= 外ナラナイ。

又、次ノ補助定理ヲウケル：

補助定理 IV. M ハ *Composition* $5_1 \oplus 5_2 =$ 関
シテ Θ ヲ *Einheit* = シテ *Gruppe* ヲツケル。

以上ノ準備ノモトニ、定理 I ノ証明 = 移ル。上述ノ結
果 = ヨリ、吾々ハ $B^*(\mathcal{K})$ ノ *Mischregel* ヲ研究スルニ充
分ナル。 $n=2$ ノ場合ヲ考ヘマシ。乃チ

$$\left(\begin{array}{cc} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \delta_1 & \delta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array} \right)_2 = \left(\begin{array}{cc} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{cc} \delta_2 & \delta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{array} \right)_2$$

ナリトシマシ。以下

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = (\alpha \gamma)_1, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = (\beta \delta)_2 \quad \text{-----} (28)$$

ナル Notation を用キル。 $\delta_2, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \text{並び} \gamma_2 = 0$

トオクコト=由リ

$$((\delta_1 \alpha_1), \gamma_1)_1 = (\delta_1 (\alpha_1 \gamma_1)_1), \quad \text{-----} (29)$$

ヲ得ル。 略カ =

$$(e \alpha)_1 = (\alpha e)_1 = \alpha \quad \text{-----} (30)$$

依ツテ O ヲノビイテ $\mathcal{K}$ ハ Composition $(\alpha \gamma)_1$ = 関シ
テ群ヲツクルコトガマカル。 $(\alpha \beta)_2$ = 関シテモ同様デア
ル。

又 $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ トオキテ

$$\left(\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 \gamma_1 \right)_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ (\alpha_1 \gamma_1)_1 & (\alpha_2 \gamma_1)_1 \end{pmatrix}_2 \quad \text{-----} (31)$$

同様=シテ

$$\left(\delta_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \right)_1 = \begin{pmatrix} (\delta_1 \alpha_1)_1 & (\delta_1 \beta_1)_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \quad \text{-----} (32)$$

ヲ得ル。 $(\alpha \beta)_2$ = 関シテモ同様ノ性質ガアル。

次=, $\delta_1 = \gamma_1, \delta_2 = \gamma_2$ トオクトキ=ハ, $\mathcal{K}$ = 於ケ
ル Mischregel ハ

$$\left(\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_2 \right)_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 \right)_1 \end{pmatrix}_2 \quad \text{-----} (33)$$

以下便宜上, γ_1, γ_2 ヲ Fixieren シタトシテ

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_2 \quad \text{-----} (34)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}_2 = (\alpha_1, \alpha_2)_2 \text{ ----- (35)}$$

トスレバ

$$\begin{aligned} \langle (\alpha_1, \alpha_2)_2, (\beta_1, \beta_2)_2 \rangle_2 \\ = (\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle_2, \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle_2)_2 \text{ ----- (36)} \end{aligned}$$

$$(\alpha, 0)_2 = \sigma(\alpha), \quad (0, \beta)_2 = \tau(\alpha) \text{ ----- (37)}$$

トオケバ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} &= (\alpha_1, \alpha_2)_2 = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2) \\ &= (\alpha_1, \gamma_1)_1 + (\alpha_2, \gamma_2)_2 \text{ ----- (38)} \end{aligned}$$

コゝ = . $\alpha + \beta$ は kommutative gruppe 7 ッ7リ,
0 が Einheit 7 + π_0 ⁽¹⁾

コノ結果ヲ以ツテ $B^*(\tilde{R})$, Mischregel 7 書キ

改メルトキ = ハ

$$\begin{aligned} ((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2) \gamma_1)_1 + ((\delta_1 \beta_1)_1 + (\delta_2 \beta_2)_2) \gamma_2)_2 \\ = (\delta_1 ((\alpha_1, \gamma_1)_1 + (\beta_1, \gamma_2)_2))_1 + (\delta_2 ((\alpha_2, \gamma_1)_1 + (\beta_2, \gamma_2)_2))_2 \end{aligned}$$

$\gamma_2 = 0$ トシテ

$$((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2) \gamma_1)_1 = (\delta_1 (\alpha_1, \gamma_1)_1)_1 + (\delta_2 (\alpha_2, \gamma_1)_1)_2$$

更 = $\delta_1 = 0$ トシテ

$$((\delta_2 \alpha_2)_2 \gamma_1)_1 = (\delta_2 (\alpha_2, \gamma_1)_1)_2$$

従ツテ前式ハ

$$((\delta_1 \alpha_1)_1 + (\delta_2 \alpha_2)_2) \gamma_1)_1 = ((\delta_1 \alpha_1)_1, \gamma_1)_1 + ((\delta_2 \alpha_2)_2, \gamma_1)_1$$

① (36) カラ (38) マデヲ導クノ = ハ、多少ノ工夫ヲ要スルガ今
ソレヲ省略シテオク。

$(\delta_1 \alpha_1)_1, (\delta_2 \alpha_2)_2$ 又々 α, β トスレバ

$$((\alpha + \beta) \gamma)_1 = (\alpha \gamma)_1 + (\beta \gamma)_2 \dots \dots \dots (40)$$

$(\alpha \beta)_1, (\alpha \beta)_2, \alpha + \beta$ = 関スル残リノ 諸性質ハ同様ニテ証明サレル。

$n=2$ ノ 場合、定理 I ハ 証明サレタ。 $n>2$ = ツイテハ 簡單ナ Induction デ証明サレル。

§ 3. Vektor-Raum, Charakterisierung.

以上ノ 結果ヲ利用シテ Mischregel ヲ有スル $B(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ = 更ニ, 條件ヲ附加スルコトニヨリ, Vektor-Raum ヲ特徴付ヲ試ミヌ。先ツ次ノ Symmetrie, 性質ヲ導入スル:

$$(S) \quad \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \gamma_{m_1} & \gamma_{m_2} & \dots & \gamma_{m_n} \\ \alpha_{m_1} & \alpha_{m_2} & \dots & \alpha_{m_n} \end{bmatrix}_n \dots \dots \dots (41)$$

コトニ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \wedge (1, 2, \dots, n)$ ノ 任意ノ Permutation

然ルトキ次ノ定理が成リ立ツ。

定理 II. (S) ト Mischregel トヲ有スル $B(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ = 関シテハ,

$$(i) \quad \gamma_1 \oplus \gamma_2 = \gamma_2 \oplus \gamma_1,$$

$$(ii) \quad (\alpha \cdot \gamma)_i = (\alpha \cdot \gamma)_j \quad (\text{任意ノ } i \text{ ト } j \text{ ト = 對シテ})$$

$$(iii) \quad (\alpha \beta)_i = (\alpha \beta)_j \quad (\quad \quad \quad \quad \quad)$$

$$(iv) \quad \mathcal{K} \text{ ハ } \sim \text{ ツノ Körper ヲツクリ } B^*(\mathcal{K}) \text{ ハ次ノ如}$$

ク表ハサレル。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}_n = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n \dots (42)$$

コ、デ (iii) = ヨリ *Multiplikation* $\Rightarrow$ *Suffix* $\Rightarrow$ トッ
テ、示スコト = シテキル。

証明. (i), (ii) ハ、定理 I ト (S) トカラ直チ = 得ラ
レル。 (iii) 従ッテ (iv) $\Rightarrow$ ミル = ハ、 $B(\mathcal{M}, \mathcal{R}) =$ 関シテ (S)
ガアレバ *Mischregel* = ヨリ、 $B^*(\mathcal{R}) =$ 對シテモ (S) ガ
ナリタツ事 = 着目スレバヨロシイ。

次 =、他ノ條件ヲ導入スル。コレヲ *Kommutativität*、
條件トイフ。

$$(K) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \dots (43)$$

ガ任意、 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} =$ 関シテ成立スル。

定理 III. (S), (K) 並ビ = *Mischregel* $\Rightarrow$ 有スルト
キ = ハ、定理 II ノ結果 = 加フル =、 $\mathcal{R}$ ガ *Kommutativ*
+ *Körper* デアルトイフコトヲ得ル。

以上ハ全ク *Kombinatorisch* + 性質 = シカ訴ヘナカ
ツタガ、コ、= 至ッテ始メテ *Topologisch* + 性質ヲ導入
シマシ。

$\mathcal{R} =$ 関スル *Topologie*、假定 (T): $\mathcal{R}$ ハ *lokal*
kompakt, *zusammenhängend* = ヲテ *erste Abzähl-*
barkeitsaxiom ト *Hausdorff*、*Trennbarkeits-*
axiom ガ充タサレテキル *Topologischer Raum* ト
スル。

$B^*(\mathcal{A}) = \text{関スル Stetigkeit}$, 假定 (S_t) : $B^*(\mathcal{A}) =$
於イテ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & \cdots \end{pmatrix} = Y$$

ハ各 Parameter = 関シテ überall stetig デアリ、更
= Y ト左辺、 $\{\alpha_k\}$ 並ビ = $\{\beta_k\}$ ($k \neq n$) ヲ與ヘルトキ、
 $\alpha_n \neq 0$ ナラバ、stetig = 解ケル。又、 $\{\alpha_k\}$ ($k \neq n$) 並
ビ = $\{\beta_k\}$ ヲ與ヘテ上ノ關係ヲ満足スル α_n ヲモトメルトキ
 $\beta_n \neq 0$ ナラバ同様 stetig = 解ケル。

然ルトキ Pontrjagin⁽¹⁾, 結果ヲ用キテ次ノ結論 =
至ル。

定理 IV. Mischungsregel ヲ有スル $B(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ が
更 = $(S), (T), (S_t)$ ナル性質ヲ有スレバ、ソレハ Koeffizien-
ten körper ヲ実数体, 複素数体, 四元数体トスル Vektor-
Raum = ナル。

定理 V. Mischungsregel ヲ有スル $B(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ が更
= $(S), (T), (S_t)$ 並ビ = (K) ヲ有スレバ、Koeff. Körper
ヲ実数体又ハ複素数体トスル Vektor-Raum = ナル⁽²⁾。

以上ノ諸定理 I—V ノ逆ノ成立スルコトハ容易ニ合ル。

(1) Pontrjagin: über stetige Algebraische Körper.
Ann. of Math. II. 33 (163—174) (1932)

尚、Pontrjagin, 結果ノ應用トシテ次ノ論文ヲ参照セラレタシ。

Kolmogoroff: Zur Begründung der projektiven
Geometrie. Ann. of Math. II. 33 (175—176) (1932)

定理 IV 或ハ 定理 V 並ビ = ソレ等ノ 逆 = ヨリ、吾々ハ
 所謂 *Vektor-Raum* ノ *Charakterisierung* が出来タ
 ト言ヒ得ヤウ。⁽²⁾ —— *Vektor-Raum* ノ 定義ヲ 誤ヘテ オカ
 ナイト 意味ヲ ナサナイガ、今ハ、考ヘノ 筋道ヲ 述ベルノ が 主
 眼ダカラ、事新シク 諸條件ヲ 列挙スルコトヲ ヤメヨウ。又、
 係数ヲ 四元数 = マデ 拡張シタ *Banach* 空間論ガ 何處マデ 進
 メラレルカ 多少ノ 興味ガ 残ツテキル ——。