OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 多元体（Divisions algebra）ノ賦値（Bewertung）ニツイテ |
| Author(s) | 守屋, 美賀雄 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1936, 93, p. 6-14 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74342 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 417. 多元体(Divisions algebra)ノ賦値(Bewertung)ニツイテ

守屋美賀雄(北大)

$k$ ガアル可換体デ且ツ賦値付ケラレテ(bewertet)居ルトキ，$k$ ニ関スル代数的拡大体 $K$ ニ於テ $k$ ノ Bewertung ガ保持サレテ居ル様ナ Bewertung ガ存在スルカドウカ、又存在スルトキハコレガ如何様ニシテ定メラレルカト云フ問題ハ賦値論ニ於ケルーツノ重要ナ問題デアリ之レニ関シテハ A. Ostrowski ノ系統的ナ研究ガアル(Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Zeit. Bd. 39(1935)).

所ガ一方 Hasse ハ Hensel ノ $p$ 進数体ヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体ヲ取リ扱ッタ際ニコノ多元体ニ基礎体ノ賦値ヲ保持スルマウナ賦値ヲ挟ヘルコトニ成功シテ居ル(Über $p$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme Math. Ann. Bd. 104 1931) 元來 Hensel ノ $p$ 進数体トイフノハ之レヲ賦値論ノ立場カラ見レバ、アル

レッノ diskrete Bewertung ニ関スル完全体(perfekter Körper)ノコトデアル。ソコデ今、自分ハ次ノコトヲ問題ニシテ見タイト思フ。

$k$ガ diskrete Bewertung ニ関シテ完全体トイフ様ナ特殊ナモノデハナク、モウ少マー般的ナ性質ヲ有スル賦値付ケラレタ Körper トスルトキ、コレヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体ニ$k$ノ賦値ノ接続($k$ノ賦値ヲ保持スルヤウナ賦値ノコト)ヲ求メルコトガ出来ルカ？　又求メルコトガ出来タトスレバ如何ニシテコレヲ定ムベキカ？　コノ問題ヲ取扱フタメニ

第一. 基礎体$k$(標数ハ常ニ0)ニ次ノ様ナ Exponentenbewertung $\varphi$ガ與ヘラレテヰル。

1. $a \in k$ニ對シテ$\varphi(a)$ハ$a$ニ依ッテ一意的ニ定マル実数
   $\varphi(0)=\infty$ 且ツ又適當ナ$k$ノ元$a$ニ對シテハ$\varphi(a)\neq 0$
   ナラシムルコトガ出来ル。
2. $a, b \in k$ニ對シテ $\varphi(ab)=\varphi(a)+\varphi(b)$
3. $a, b \in k$ニ對シテ $\varphi(a+b) \geqq Min(\varphi(a), \varphi(b))$.

$k$ノ元$a$ガ$\varphi(a)\geqq 0$ナル性質ヲ有スルトキ$a$ヲ$k$ノ整元ト呼ビ特ニ$\varphi(a)=0$ナラバ$a$ヲ$k$ノ單位元トイフコトニスル。

第二. $k$ハ$\varphi$ニ関シテ relativ perfekten Körper デアル、即チ

$k$ノ整元ヲ係数ニ持ッ文ノ多項式

$$h(x)=a_0x^r+\cdots\cdots\cdots+a_r$$

ニ於テ少クトモ、アルーツノ $x^i$ ノ係数ガ単位元（但シ $0<i<r$）デ且ツ $\varphi(a_r)>0$ ナラバ $h(x)$ ハ $k$ ニ於テ可約（reducibel）デアル。

$k$ ガ relativ perfekten Körper デアルトキニハ次ノ諸定理ガ成立スル。（何レモ Ostrowski ノ前述ノ論文参照、但シ Ostrowski ノ論文デハ Bewertung ガ Exponenten-bewertung デナク Kürschák ノ定義ニヨル Bewertung デアル！）

I. $h(x)=a_0x^r+\cdots\cdots a_r$

ヲ整係数ヲ有スル $k$ ノ既約多項式トスルト

$$\varphi(a_i)\geqq Min(\varphi(a_0),\ \varphi(a_r)) \quad 但シ\ r>i>0.$$

II. $k$ ノ代数的拡大体 $K$ ニハ常ニ $\varphi$ ノ接続ガ存在スル。

即チ、$K$ ノ任意ノ元 $\gamma$ ガ $k$ ニ於ケルーツノ既約方程式

$$x^r+a_1x^{r-1}+\cdots\cdots+a_r=0$$

ノ根ナルトキハ $\gamma$ ノ賦値トシテ $\frac{1}{r}\varphi(a_r)$ ヲ採ヘレバヨイ。

III. II ニ於テ定メラレタ $K$ ノ賦値ガ $K$ ニ於ケル唯一ノ $\varphi$ ノ接続デアル。

サテ relativ perfekte Körper ノ例トシテ何ガアルカトイヘバ

1. $\varphi$ ニ関スル完全体
2. $k$ ノ中ニ $\varphi$ ニ関スルーツノ完全体 $k_0$ ガ存在シ且ツ $k$ ハ $k_0$ ニ関スル有限次ノ拡大体 $k_1<k_2<\cdots\cdots$ $\cdots<k_j<\cdots\cdots$ ノ併合体（Vereinigungskörper）

トシテ定義サレテヰル（拙著 Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades. 北大. 理学部紀要三巻 (1935)）等デアル。

次ニ $k$(relativ perfekten Körper) ヲ基礎体ニ有スル有限階ノ多元体 $\mathfrak{D}$ ヲトル。今，$\mathfrak{D}$ ノ $k$ ニ関スル階数ヲ $n$ トスル。

$\mathfrak{D}$ ニ対シテ次ノ三性質ヲ有スル函数 $\overline{\mathfrak{o}}$ ガ与ヘラレテ居ルトキ、$\mathfrak{D}$ ヲ〝賦値付ケラレテ居ル〟ト云ヒ $\overline{\mathfrak{o}}$ ヲ $\mathfrak{D}$ ノ賦値ト云フ。

1. $\alpha \in \mathfrak{D}$ ニ対シテ $\overline{\mathfrak{o}}(\alpha)$ ハ $\alpha$ ニ依ッテ一意的ニ定マル実数

   $\overline{\mathfrak{o}}(0)=\infty$，且ツ又適当ナ $\mathfrak{D}$ ノ元 $\alpha$ ニ対シテハ

   $\overline{\mathfrak{o}}(\alpha)\neq 0$ トナル。

2. $\overline{\mathfrak{o}}(\alpha\beta)\overline{\mathfrak{o}}(\alpha)+\overline{\mathfrak{o}}(\beta)=\overline{\mathfrak{o}}(\beta\alpha)$

3. $\overline{\mathfrak{o}}(\alpha+\beta)\geqq Min(\overline{\mathfrak{o}}(\alpha),\overline{\mathfrak{o}}(\beta))$

以上ノ三ツノ條件ヨリ

i) $\overline{\mathfrak{o}}(1)=\overline{\mathfrak{o}}(-1)=0$

ii) $\overline{\mathfrak{o}}(\alpha+\beta)=Min.(\overline{\mathfrak{o}}(\alpha),\overline{\mathfrak{o}}(\beta))$

特ニ $k$ ノ任意ノ元 $a$ ニ対シテ

$\overline{\mathfrak{o}}(a)=\varphi(a)$ ナラバ

$\overline{\mathfrak{o}}$ ヲ $\varphi$ ノ接続ト呼ブコトニスル。

§1. $\mathfrak{D}$ ノ賦値 $\overline{\mathfrak{o}}$ ガ $\varphi$ ノ接続ナルトキ $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ $\varphi$ ニ依ヲ如何様ニ定メラレルカ？

$\mathfrak{D}$ ノ任意ノ元ヲ $\alpha$ トスルトキ，$\alpha$ ハ $k$ ノ元ヲ係数ニ有ス

ル次ノ様ナ $k$ ノ既約方程式ノ根ニナル。

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m=0$$

[$f(x)$ ハ $\alpha$ ニ依テ一意的ニ定マル]

依ツテ $D$ ハ $k(\alpha)$ ナル $k$ ニ関シテ $m$ 次ノ代数体ヲ含ム。サテ重ハコノ場合 $k(\alpha)$ ニ於ケル $\varphi$ ノ接続賦値トナルカラ明ラカニ

$$重(\alpha)=\frac{1}{m}\varphi(a_m)$$

デアラウ。(II及ビIII=依ル)・サテ今，$\alpha$ ノ $k$ ニ関スル正規表現ヲ A トスレバ $\alpha$ ノ指標方程式 (Characteristische Gleichung)

$|xE-A|=F(x)=0$ ハ $n$ 次ノ方程式デ且ツヨク知ラレテ居ル如ク

$$F(x)=|f(x)|^{\frac{n}{m}}$$

依テ明ラカニ $a_m^{\frac{n}{m}}=(-1)^n|A|$

即チ $重(\alpha)=\frac{1}{m}\varphi(a_m)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$.

今簡単ニ $|A|$ ヲ $\alpha$ ノ Norm ト呼ブコトニスル：$|A|=N(\alpha)$

サテ $k$ ノ有スル性質カラシテ $k(\alpha)$ ニ於ケル $\varphi$ ノ接続ハ唯一ツデアルカラ

$$重(\alpha)=\frac{N(\alpha)}{n}$$ ガ $D$ ニ於ケル唯一ツノ $\varphi$ ノ接続デアル。

## §2. $D$ ニ $k$ ノ賦値 $\varphi$ ノ接続ヲ與ヘルコト。

$D$ ノ任意ノ元 $\alpha$ ノ Norm ヲ $|A|$ トスルトキ

$$重(\alpha)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$$

ト定義スレバ、コノ様ニシテ定メラレタ重ガ実際ニ $D$ ノ賦値

トナルコトヲ示サウ。

1. $\overline{\omega}(\alpha)$ ハ定義ニヨリ明ラカニ $\alpha$ ニ依ッテ一意的ニ定マル實数。

尚 $a \in \mathfrak{k}$ ナルトキハ $|A| = a^n$ 依ッテ

$$\overline{\omega}(\alpha) = \frac{1}{n}\varphi(a^n) = \varphi(a)$$

特ニ $a=0$ ナラバ $\overline{\omega}(0)=\infty$, 又 $\mathfrak{k}$ ノ適當ナ元 $a$ ニ對シテ

$$\overline{\omega}(a) = \varphi(a) \neq 0$$

ナラシムルコトガ出來ル。

2. $\alpha, \beta \in \mathfrak{D}$ トスルトキ $|A|, |B|$ ガ夫々 $\alpha, \beta$ ノ Norm ナラバ

$\alpha\beta$ ノ Norm ハ明ラカニ $|A|\cdot|B|$ 依ッテ

$$\overline{\omega}(\alpha\beta) = \frac{1}{n}\varphi(|A|\,|B|) = \frac{1}{n}\varphi(|A|) + \frac{1}{n}\varphi(|B|) = \overline{\omega}(\alpha) + \overline{\omega}(\beta)$$

3. $\overline{\omega}(\alpha+\beta) \geqq Min(\overline{\omega}(\alpha), \overline{\omega}(\beta))$.

ソレニハ今、$\overline{\omega}(\alpha) \geqq \overline{\omega}(\beta)$ ($\overline{\omega}(\beta) > \overline{\omega}(\alpha)$ ノトキモ同様) トスレバ

$$(\alpha\beta^{-1}+1)\beta = \alpha+\beta$$

且ツ $\overline{\omega}(\alpha\beta^{-1}) \geqq 0$

$\alpha\beta^{-1}$ ノ満足スル $\mathfrak{k}$ ニ於ケル既約方程式ヲ $f(x) = x^m + a_1 x^{(m-1)} + \cdots\cdots + a_m$ トスルト $\alpha\beta^{-1}$ ノ Norm ハ $(-1)^n a_m^{\frac{n}{m}} = |AB^{-1}|$ デアルカラ

$\overline{\omega}(\alpha\beta^{-1}) = \frac{1}{n}\varphi(|AB^{-1}|) \geqq 0$ ヨリ $\varphi(a_m) \geqq 0$ トナラナクテハナラヌ。

且又. $\varphi(1) = 0$ デアルカラ

Iニ依ッテ

$$a_1, \cdots\cdots\cdots, a_{m-1}$$

ハ悉クkノ整元デナケレバナラナイ。

サテ今、$y=1+x$トシテ、$f(x)$=代入スルト

$$f(y-1)=y^m+\cdots\cdots\cdots+(a_m-a_{m-1}+\cdots\cdots+(-1)^m 1)$$

トナリ、$\overline{\omega}(1+\alpha\beta^{-1})=\frac{1}{n}\varphi(a_m-a_{m-1}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^m)\geqq 0$

($a_m, \cdots\cdots\cdots, (-1)^m$ハ悉クkノ整元ナル故) 依ッテ

$$\overline{\omega}(\alpha+\beta)=\overline{\omega}(\alpha\beta^{-1}+1)+\overline{\omega}(\beta)\geqq\overline{\omega}(\beta)$$

即チ　　$\overline{\omega}(\alpha+\beta)\geqq Min(\overline{\omega}(\alpha), \overline{\omega}(\beta))$

既ニ証明セラレタ如ク $\overline{\omega}$ ハ$\varphi$ノ接続デアル。

依ッテ次ノ事実ガ証明セラレタ。

kヲ賦値$\varphi$ニ関スル relativ perfekter Körper

D. kヲ基礎体ニ有スルN階ノ多元体 $\alpha\in D$ ノkニ於ケル正規表現ヲAトスル

Dニハ常ニ唯一ツノkノ賦値ノ接続ガ存在シ、ソレハ

$$\overline{\omega}(\alpha)=\frac{1}{n}\varphi(|A|)$$

デ求メラレル。

## §3. Derivierte Divisionsalgebren

基礎体k(relativ perfekter Körper)ニ関シテN階ノ多元体Dハ上記ノ議論デkノ接続賦値$\overline{\omega}$ヲ有スルコトヲ知ッタ、ソコデ今度ハコノ賦値$\overline{\omega}$ニ関シテDノ中デ収斂トカ、基本列トカイフ概念ヲ定義シヨウト思フ。

1.　$\alpha_1, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n \cdots\cdots\cdots$ヲDノ元ヨリナル元列トスルト

之レニ對シテDノ適當ナ元$\alpha$ニ對シテ

$$\varphi(\alpha-\alpha_n)$$

ガ0ト共ニ如何程デモ大キクナルトキハ其ノ元列ガ$\alpha$ニ收斂スルト云フ。

2. $\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n, \cdots\cdots$ヲDノ元列トスル。

今Nヲ大キクトレバ $m_1 > m_n > N$ ナル指數ニ對シテ

$$\varphi(\alpha_{m_1}-\alpha_{m_2})$$

ガ又如何程デモ大キクナリ得ルトキ

$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n, \cdots\cdots$ ヲDノ基本列ト云フ。

收斂スルDノ元列ハ基本列デアル。(逆ハ必ズシモ成立シナイ)

コレカラ先ハ可換体ニ於ケルト同樣ニシテ

Dノスベテノ基本列ガ極限元ヲ有スル樣ナDヲ含ム多元体$D^*$ヲツクルコトガ出來ル。

又$D^*$ニ於テハDノ賦値$\overline{v}^*$ノ接續ガ存在シ$D^*$ハ$\overline{v}^*$ニ關シテ完全デアル。

即チ$D^*$ノ如何ナル基本列モ$D^*$ニ於テ極限元ヲ有スル。

サテ、コノ樣ナDヲ含ム完全多元体ノ中デ最小ナモノ(同型ナルモノハ同一ナモノト見ナシテ)ガ存在スルガ、之レヲDノ derivierte Divisions algebra トイヒ$\overline{D}$ヲ以テアラハス。

次号ニハ基礎体$k_0$ガ$\varphi$ニ關シテ特ニ perfekt ナラバ$\overline{D}$

かドウナルカト云フコトヲ攻究シテ見ヨウト思フ。