



Title	境界線ノRegularityニ付テ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 93, p. 18-24
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74344
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

419. 境界点ノ Regularity = 付テ

井上正雄 (阪大)

平面上ノ有界ノ領域ヲ Ω , ソノ境界点ノ集合ヲ Σ デ表ハス。

Σ 上ニ連続函数 $f(z')$ ヲ與ヘヌトキ, コノ境界條件ニヨリ, Wiener ノ所謂 *generalised solution of Dirichlet* ⁽¹⁾, $H_f(z)$ が唯一ニ決定サレル。境界点 z' が Σ 上ノ任意ノ連続函数 $f(z) =$ 對シ常ニ $\overleftarrow{H}_f(z') = \overrightarrow{H}_f(z') = f(z')$ ⁽²⁾ヲ満足スルトキ, z' ヲ *regular* ノ境界点ト呼ブ。

(1) Wiener *Certain notions in potential theory*
q. Math. ph. Massach. Instit. 1924.

(2) $\overleftarrow{H}_f(z')$ ノ意味:

z' ノ ρ 近傍ヲ $U_\rho(z')$ ト表ハス。

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{O. G. } H_f(z) = \overrightarrow{H}_f(z'), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{u. G. } H_f(z) = \overleftarrow{H}_f(z')$$

$$\text{一般} = \overleftarrow{H}_f(z') \leq \overrightarrow{H}_f(z'), \quad \text{トキ} = \overleftarrow{H}_f(z') = \overrightarrow{H}_f(z') + \text{ル} \quad \text{トキ} \leq \overleftarrow{H}_f(z')$$

ヲ表ハス。

上ノ *Generalised solution* $H_f(z)$ ノ Σ 上ニ *Capacity* 0 ノ集合ヲ除ケ

$$\overleftarrow{H}_f(z') = f(z') + \text{ル} \quad \text{トキ} \quad \text{知レテイル。}$$

サテ

$$0. G. |z| = R \text{ トシ, } z \in \Omega$$

⁽³⁾
 $z \in \mathcal{R} (|z| \leq R)$ 且ツ $z \in \Omega$ ナル z ノ絶対値ノ集合ヲ E_Ω デ表ハセバ, 之レハ $[0, R]$ 上ノ閉集合トナル. E_Ω ト $[r_1, r_2]$ トノ *Durchschnitt* ヲ $E_\Omega(r_1, r_2)$ デ表ハスコト = スル。

シカルトキ *Beurling* ハ彼ノ *thèse*⁽⁴⁾ = ヲイテ,
境界点 z' が *regular* ナルタメノ條件トシテ

$$\left. \begin{array}{l} z \in \Sigma, |z - z'| < r \\ r \text{ ハ任意ノ正数} \end{array} \right\} \text{トスルトキ}$$

T. V. $\log |z - z'|$ が有界デナイコト

ヲ証明シタ。Notation ヲ簡單 = スルタメ $z' = 0$ ト假定スレバ (コノ假定ハ一般性ヲ失ハナイ),

$$\int_{E_\Omega(0, r)} d \log t = +\infty \text{ ----- (5)}$$

ナルコトデアル。

コノデハ, コノ條件が必要條件デハナイコトヲ *example* ヲ作ルコト = ヲツテ証明シヨウ。——コレハ同時 = *regular* ナ無限次連結領域⁽⁵⁾ (孤立境界点ヲ含マナイ) ノ例 = ミナツテイルノデアル。

(3) 平面上ノ $|z| \leq R$ ノ満足スル点集合ヲ意味ス。

(4) A. Beurling *Etudes sur un problème de majoration*

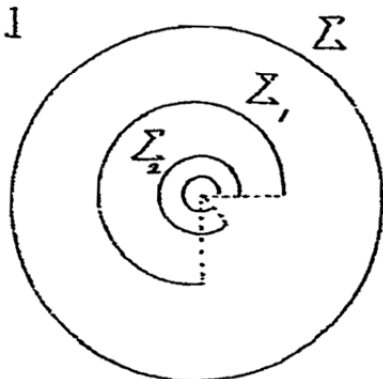
(5) *domain* が *regular* トハ普通ノ意味デ、*Dirichlet* ノ解が常ニ存在スル *domain* ヲ云フ。従ツテ *regular domain* ノ境界
(次頁へ)

$$\mathcal{R}(|z|=1)=\Sigma, \quad \mathcal{R}(|z|<1)=E$$

$$\mathcal{R}(z=\frac{1}{2}e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{2}) = \Sigma, \quad E - \Sigma = E,$$

$$\mathcal{R}(z=\frac{1}{2^n}e^{i\theta}, \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{2^n}) = \Sigma_n, \quad E_{n-1} - \Sigma_n = E_n$$

Fig. 1



$E_n (n=1, 2, \dots)$ が *regular*

ナルコトハ上ノ *criterion* =

ヨリ明ラカデアル。

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega_0,$$

$$\Omega_0 - \{0\} = \Omega$$

トスレバ Ω ハ無限次連結領域トナリ、原点以外ノ境界点が *regular* ナルコトハ明ラカデアルが原点モ亦 *regular* トナルコトガ次ノ如クシテ証明サレル。

点ハ皆 *regular* デアリコノ逆ヲ該スル。

又孤立境界点ヲ含マス有限次連結領域ハ *regular domain* ナルコトハ既に *Lebesgue* = ヨツテ証明サレタイル。

H. Lebesgue *Sur le problème de Dirichlet*

Rendic. circ. mat.

Palermo 1907.

ソレハ Bouligand, 定理⁽⁶⁾ = ヨリ $\overleftarrow{H}(0) = \overrightarrow{H}(0) = 0$ ヲ満足サス
 Ω デ, positive harmonic function, 存在ヲ証明スレバ充分デアル。

ソノタメニ,

Σ 上デ 1, Σ_1 上デ 0 ナル値ヲトル E_1 デ,
 harmonic function $H_1(z)$

Σ 上デ 1, Σ_1, Σ_2 上デ 0 " E_2 " $H_2(z)$

Σ , 1, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ 上デ 0 " E_n " $H_n(z)$

(E_n ハ regular domain デアルカラ、カナル $H_n(z)$ ハ存在スル)

カクテ得ラレタ $\{H_n(z)\}$ ハ下方ニ有界ナ單調ニ減少スル調和函数ノ系列デアルカラ Harnackノ定理ニヨリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) = H(z)$$

ガ Ω デ存在シ且ツ $H(z)$ ハ Ω デ, harmonic function デアル。

シカモ $H(z) > 0$ デアル ($H(z) \geq 0$ ナルコトハ明ラカデアル)

$$\Sigma$$
上デ 1, $\Sigma'_1 = \mathcal{R}(|z| = \frac{1}{2})$ デ 0ヲトル $\frac{1}{2} < |z| < 1$

(6) Ω ノ境界点 z' ガ regular ナルタメノ必要條件ハ

$\overleftarrow{H}(z') = \overrightarrow{H}(z') = 0$ ヲ満足スル $U_p(z') \cdot \Omega$ デ, positive harmonic function $H(z)$ ノ存在スルコトデアル。

(p ハ任意ノ正数)

デノ調和函数ヲ $U(z)$ トスレバ、スベテノ $n =$ ツイテ
 $(n = 1, 2, \dots)$

コノ Ring domain 内デ $H_n(z) > U(z) > 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) = H(z) \geq U(z) > 0$$

故ニ勿論 Ω 内デ $H(z) > 0$ デアル。

次ニ

$$H_n(0) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

トナルカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(0) = H(0) = 0$$

故ニ任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘストキ $N(\varepsilon)$ ガ定リ

$$\varepsilon > H_N(0) > H_{N+1}(0) > \dots > 0$$

故ニ $H_N =$ 關シテ δ ガ定リ $|z| < \delta, z \in \Omega_0 =$ 對シテ

$$\varepsilon > H_N(z) > H_{N+1}(z) > \dots > 0$$

故ニ

$$\varepsilon > 0, G. H(z) > 0$$

$$|z| < \delta$$

$$\delta \rightarrow 0 \quad \varepsilon > \overrightarrow{H(0)} \geq 0$$

シカルニ ε ハ如何程小サクテモヨイカラ結局

$$\overleftarrow{H(0)} = 0$$

トナル。

故ニ原点 0 ハ regular ナルコトガ解ツタ。

然ルニ明ラカニ $\int_{\Gamma_{\Omega_0}(0,r)} d \log t = 0$ デアル、故ニ條件 (E) ハ

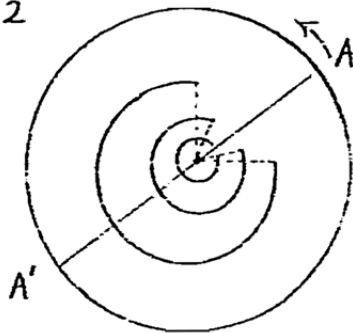
必要條件デハナイ。

又一方之レテ Ω が *regular domain* ナルコトヲ証明サレタ。

即チ Ω が求ムル *regular* ナ無限次連結領域デアール。
以上ハ二次元デヤツタノデアールが同様、*example* デ三次元デモ作レル。

即チ Fig. 2 ヲ AA' ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル三次元ノ無限次連結領域モ亦 *regular* ナナルコトハ同様ニシテ証明サレル。

Fig. 2



尚 n 次元ノ場合ニテ境界点ノ *regular* ナルタメノ必要條件ハ既ニ *Wiener* ニヨツテ求メラレテイル。⁽⁷⁾

最後ニ一言次ノコトヲ附加シヤウ：

“可附番個ノ *regular domain* ノ *durchschnitt* が *domain* トナルナラバ、ソレハ *regular domain* デアール。”

コレハ *Bouligand* ノ定理ヨリ直チニ証明スルコトが出来ル。

シカシ *regular domain* ノ *Vereinigungsmenge* が必ズシモ *regular* トナラナイコトハ次ノ例デモ容易ニ

(7) *Wiener*

The Dirichlet Problem

J. Math. Ph. Massach. Instit 1924.

解ルコトアル。

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{|} & + & \textcircled{-} = \textcircled{\cdot} \\ \text{reg} & & \text{reg} \quad \text{ineg} \end{array}$$