OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	境界線ノRegularityニ付テ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 93, p. 18-24
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74344
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

419. 境界点ノ Regularity ニ付テ

井上正雄（阪大）

平面上ノ有界ナ領域ヲ Ω，ソノ境界点ノ集合ヲ Σ デ表ハス。

Σ 上ニ連続函数 $f(z')$ ヲ與ヘタトキ，コノ境界條件ニヨリ，Wiener ノ所謂 generalised solution of Dirichlet[1]，$H_f(z)$ ガ唯一的ニ決定サレル。境界点 z' ガ Σ 上ノ任意ノ連続函数 $f(z)$ ニ對シ常ニ $\overleftarrow{H}_f\overrightarrow{(z')}=f(z')$[2] ヲ満足スルトキ，$z'$ ヲ regular ナ境界点ト呼ブ。

---

(1) Wiener certain notions in potential theory
J. Math. & Massach. Institut. 1924.

(2) $\overleftarrow{H}_f\overrightarrow{(z')}$ ノ意味：

z' ノ ρ 近傍ヲ $U_\rho(z')$ ト表ハストキ

$$\lim_{\rho\to 0}\ \text{O.G.}_{z\in U_\rho(z')\cdot\Omega} H_f(z)=\overleftarrow{H}_f(z'),\qquad \lim_{\rho\to 0}\ \text{u.G.}_{z\in U_\rho(z')\cdot\Omega} H_f(z)=\overrightarrow{H}_f(z')$$

一般ニ $\overleftarrow{H}_f(z')\leqq\overrightarrow{H}_f(z')$，トク ニ $\overleftarrow{H}_f(z')=\overrightarrow{H}_f(z')$ トナルトキ之レヲ $\overleftrightarrow{H}_f(z')$ デ表ハス。

上ノ Generalised solution $H_f(z)$ ハ Σ 上デ Capacity 0 ノ集合ヲ除イテ

$$\overleftarrow{H}_f\overrightarrow{(z')}=f(z')$$

ナルコトガ知レテイル。

サテ

$$\underset{z\in\Omega}{\mathrm{O.G.}}|z|=R \text{ トシ,}$$

$z\in\mathcal{R}$[3] $(|z|\leqq R)$ 且ツ $z\bar{\in}\Omega$ ナル z ノ絶対値ノ集合ヲ E_Ω デ表ハセバ，之レハ $[0, R]$ 上ノ閉集合トナル、E_Ω ト $[r_1, r_2]$ トノ Durchnitt ヲ $E_\Omega(r_1, r_2)$ デ表ハスコトニスル。

シカルトキ Beurling ハ彼ノ thèse[4] ニヲイテ，

境界点 z' ガ regular ナルタメノ條件トシテ

$$\left.\begin{array}{l} z\in\Sigma,\ |z-z'|<r \\ r \text{ ハ任意ノ正数} \end{array}\right\} \text{トスルトキ}$$

T.V. $\log|z-z'|$ ガ有界デナイコト

ヲ証明シタ。Notation ヲ簡單ニスルタメ $z'=0$ ト假定スレバ（コノ假定ハ一般性ヲ失ハナイ），

$$\int_{E_\Omega(0,r)} d\log t = +\infty \text{ ---------- } (S)$$

ナルコトデアル。

コヽデハ，コノ條件ガ必要條件デハナイコトヲ example ヲ作ルコトニヨツテ証明シヨウ。——コレハ同時ニ regular ナ無限次連結領域[5]（孤立境界点ヲ含マナイ）ノ例ニモナツテイルノデアル。

---

(3) 平面上ノ $|z|\leqq R$ ヲ満足スル点集合ヲ意味ス。

(4) A. Beurling Etudes sur un problème de majoration

(5) domain ガ regular トハ普通ノ意味デノ Dirichlet ノ解ガ常ニ存在スル domain ヲ云フ。從ツテ regular domain ノ境界

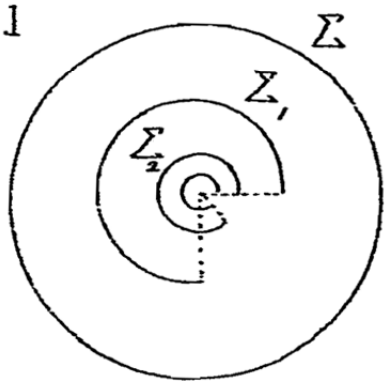
（次頁ヘ）

$\mathfrak{R}(|z|=1)=\Sigma$, $\mathfrak{R}(|z|<1)=E$

$\mathfrak{R}(z=\frac{1}{2}e^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{2})=\Sigma_1$, $E - \Sigma = E_1$

$\mathfrak{R}(z=\frac{1}{2^n}e^{i\theta},\ \theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{2^n})=\Sigma_n$, $E_{n-1}-\Sigma_n=E_n$

Fig. 1



E_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) が regular ナルコトハ上ノ criterion ヨリ明ラカデアル。

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega_0,$$

$$\Omega_0 - \{0\} = \Omega$$

トスレバ Ω ハ無限次連結領域トナリ、原点以外ノ境界点が regular ナルコトハ明ラカデアルが原点モ亦 regular トナルコトが次ノ如クシテ証明サレル。

点ハ皆 regular デアリコノ逆ヲ成立スル。

又孤立境界点ヲ含マヌ有限次連結領域ハ regular domain ナルコトハ既ニ Lebesgue ニヨッテ証明サレテイル。

H. Lebesgue Sur le problème de Dirichlet

Rendic. circ. mat.

Palermo 1907.

ソレニハ Bouligand ノ定理[6]ニヨリ $\overleftarrow{H}(0)=0$ ヲ満足スル Ω デノ positive harmonic function ノ存在ヲ証明スレバ充分デアル。

ソノタメニ、

Σ 上デ 1, Σ_1 上デ 0　ナル値ヲトル E_1 デノ harmonic function ヲ $H_1(z)$

Σ 上デ 1, Σ_1, Σ_2 上デ 0　〃　E_2　〃　$H_2(z)$

⋮

Σ 上デ 1, $\Sigma_1, \cdots \Sigma_n$ 上デ 0　〃　E_n　〃　$H_n(z)$

⋮

(E_n ハ regular domain デアルカラ、カヽル $H_n(z)$ ハ存在スル)

カクテ得ラレタ $\{H_n(z)\}$ ハ下方ニ有界ナ単調ニ減少スル調和函数ノ系列デアルカラ Harnack ノ定理ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z)=H(z)$$

ガ Ω デ存在シ且ツ $H(z)$ ハ Ω デノ harmonic function デアル。

シカモ $H(z)>0$ デアル ($H(z)\geqq 0$ ナルコトハ明ラカデアル)

Σ 上デ 1, $\Sigma_1' = R\left(|z|=\frac{1}{2}\right)$ デ 0 ヲトル $\frac{1}{2}<|z|<1$

---

(6) Ω ノ境界点 z' が regular ナルタメノ必要條件ハ $\overleftarrow{H}(z')=0$ ヲ満足スル $U_\rho(z')\cdot\Omega$ デノ positive harmonic function $H(z)$ ノ存在スルコトデアル。
(ρ ハ任意ノ正数)

デノ調和函数ヲ $u(z)$ トスレバ、スベテノ n ニツイテ

$(n = 1, 2, \cdots\cdots\cdots)$

コノ Ring domain 内デ $H_n(z) > u(z) > 0$

$\therefore \quad \lim H_n(z) = H(z) \geqq u(z) > 0$

故ニ勿論 Ω 内デ $H(z) > 0$ デアル。

次ニ

$$H_n(0) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

トナルカラ

$$\lim_{n\to\infty} H_n(0) = H(0) = 0$$

故ニ 任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ挟ムトキ $N(\varepsilon)$ ガ定リ

$$\varepsilon > H_N(0) > H_{N+1}(0) > \cdots\cdots\cdots\cdots > 0$$

故ニ H_N ニ関シテ δ ガ定リ $|z| < \delta$, $z \in \Omega_0$ ニ対シテ

$$\varepsilon > H_N(z) > H_{N+1}(z) > \cdots\cdots\cdots\cdots > 0$$

故ニ

$$\varepsilon > 0. \underset{|z|<\delta}{G.} \; H(z) > 0$$

$\delta \to 0 \qquad \varepsilon > \overrightarrow{H(0)} \geqq 0$

シカルニ ε ハ如何程小サクテモヨイカラ結局

$$\overleftarrow{H}(0) = 0$$

トナル。

故ニ原点 0 ハ regular ナルコトガ解ッタ。

然ルニ明ラカニ $\int_{E_\Omega(0.r)} d\log t = 0$ デアル、故ニ條件(5)ハ

必要條件デハナイ。

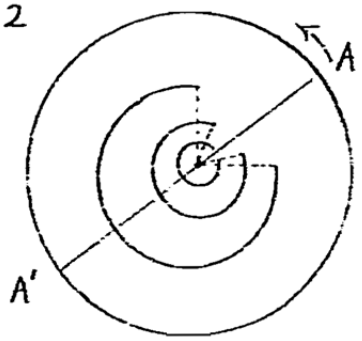
又一方之レデ Ω が regular domain ナルコトヲ証明サレタ。

即チ Ω が求ムル regular ナ無限次連結領域デアル。

以上ハ二次元デヤツタノデアルが同様ノ example デ三次元デモ作レル。

即チ Fig.2 ヲ AA′ ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル三次元デノ無限次連結領域モ亦 regular ニナルコトハ同様ニシテ証明サレル。

Fig.2



尚ホ次元ノ場合ニヲイテ境界点ノ regular ナルタメノ必要條件ハ既ニ Wiener ニヨツテ求メラレテイル。(ワ)

最後ニ一言次ノコトテ附加シヤウ：

〃可附番個ノ regular domain ノ durchnitt が domain トナルナラバ，ソレハ regular domain デアル〃

コレハ Bouligand ノ定理ヨリ直チニ証明スルコトが出来ル。

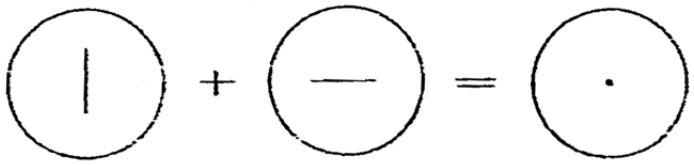
シカシ regular domain ノ Vereinigungsmenge が必ズシモ regular トナラナイコトハ次ノ例デモ容易ニ

(ワ) Wiener

The Dirichlet Problem

J. Math. Ph. Massach. Instit 1924.

解ルコトデアル。



reg　　reg　　ineg