



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IX
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 94, p. 4-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74347
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

422. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IX

福原 満洲 雄 (北大)

形式的解 (β) コレヲ論ズルトキニハ $a_{j0} = 0$ ト假定スル、漸近的ニ (α) ナル形ニ展開サレル (A) ノ解 $y = \varphi(x)$ ヲ取り、 $z = y - \varphi(x)$ ナル置換ヲ行ハベクニ満足スル方程式ハ $z = 0$ ヲ解トシテ持ツカラ $a_{j0} = 0$ ノ場合ニ帰着サレル、故ニ $3^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ 即チ $f(x, y)$ が $y = 0$ ノ近傍ニ y ノ正則函数デアール場合ハ $a_{j0} = 0$ ト假定シテモ一般性ヲ失フコトニハナラナイガ、例ヘバ假定 1° ヲ取ツタ場合ニ $\phi(t, \lambda)$ が 1° ヲ満足シテキテモ、 z ノ方程式ノ右辺ハソレト同様ニ條件ヲ満足シナイ。コレハ假定ノトリ方がマヅイカラデアラウガ、コノデハサウイフ問題ニ立入ラナイ。

x, y ノ代リニ変数 t, y ヲ取ルベ (β), (C), (c) ハ

$$(\beta') \quad y \sim \sum a_{jk} e^{jt} (C e^{\lambda t})^k$$

$$(C') \quad \frac{dz}{dt} = G(t, C e^{\lambda t}, z)$$

$$(c') \quad G(t, \zeta, z) \sim \sum b_{jkl} e^{jt} \zeta^k z^l$$

トナル。更ニ変数 t, λ ヲ取ルベ (β') ハ

$$(\beta'') \quad \lambda \sim \lambda t + \Gamma + \sum \beta_{jk} e^{jt + k(\lambda t + \Gamma)} \quad (\beta_{a0} = 0)$$

トナル。 $G(t, C e^{\lambda t}, z) = G(t, \lambda t + \Gamma, z)$ ト置クコトニヨリ、(C'), (c') ハ

$$(c'') \quad \frac{dz}{dt} = G(t, \lambda t + \Gamma, z)$$

$$(c') \quad g(t, \zeta, z) \sim \sum b_{jk} l e^{j\zeta + k\zeta} z^l$$

トナル。

特異点 (I, i) $\lambda \neq 0$ デモ正ノ整数デモナク, $\mu - \nu \tan \theta > 0$ トナルヤウナ θ が考ヘテキル範囲ニ存在スル場合ナル、故ニ假定 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ヲ取ルナラベ $\mu - \nu \tan \theta_0 > 0$ 1 場合, 假定 $4^\circ, 5^\circ$ ヲ取ルナラベ $\mu - \nu \tan \theta_1 > 0$ 又ハ $\mu - \nu \tan \theta_2 > 0$ トナル場合, 假定 6° ヲ取ルナラベ (θ_1 ハ幾ラデモ $+\frac{\pi}{2} =$, θ_2 ハ幾ラデモ $-\frac{\pi}{2} =$ 近ク取レルカラ) λ が負ノ實数デナイ場合トナル。

尚ホ θ, ω ナドノ角ハ $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ ノ間ノ値ヲ取ルモノトスル。

1° $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \leq \sigma_0$ ナルトキ
 $\Delta = \lambda t + \Gamma$ ハ

$g_1 + p \tan \omega_1 < q < g_2 + p \tan \omega_2$, $p < p_0$
 ニ合マレルナラベ $\Delta = \lambda t + \Gamma + o(1)$ ヲ満足スル (A'') ノ解
 $\Delta = \varphi(t, \zeta)$ ($\zeta = \xi + i\eta = \lambda t + \Gamma$) ハ

$$\begin{cases} \zeta = \sigma \tan \theta_0, & \sigma \rightarrow -\infty \\ g_1 + 0 + \xi \tan \omega_1 < \eta < g_2 - 0 + \xi \tan \omega_2 \end{cases}$$

ノトキ (β'') ナル形ニ展開サレル。

2° 上ニ述ベタ解 $\Delta = \varphi(t, \zeta)$ ($\zeta = \lambda t + \Gamma$) ハ ζ ノ函数ト考ヘテ正則デアル。

3° $y = e^{\lambda t} (C + o(1))$ ヲ満足スル (A') ノ解 $y = \varphi(t, \zeta)$ ($\zeta = C e^{\lambda t}$) ハ

$$\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \rightarrow -\infty, \quad \zeta \rightarrow 0$$

、時 (β') + ル形 = 展開 + レ、從ッテ ζ の函数ト考ヘテ $\zeta = 0$ デ正則デアル。

$$4^\circ \quad t = \sigma + i\tau \text{ が}$$

$$\tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, \quad \sigma \leq \sigma_0$$

= 属スルトキ $\Delta = \lambda t + \Gamma$ ハ

$$g_1 + p \tan \omega_1 < p < g_2 + p \tan \omega_2, \quad p < p_0$$

= 念マレルナラバ $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \rightarrow -\infty$ / トキ (β') + ル形 = 展開 + レル (A'') の解 $\Delta = \varphi(t, \zeta)$ ($\zeta = \lambda t + \Gamma$) ハ

$$\begin{cases} \tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, & \sigma \rightarrow -\infty \\ g_1 + 0 + \xi \tan \omega_1 < g_2 - 0 + \xi \tan \omega_2, & \xi \rightarrow -\infty \end{cases}$$

ノトキ連続デ (β'') + ル形 = 展開 + レ、内部デ t, ξ の正則函数デアル。

5° $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \rightarrow -\infty$ / トキ (β') + ル形 = 展開 + レル (A') の解 $y = \varphi(t, \zeta)$ ($\zeta = C e^{\lambda t}$) ハ

$$\tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2, \quad \sigma \rightarrow -\infty, \quad \zeta \rightarrow 0$$

ノトキ (β') + ル形 = 展開 + レ、從ッテ $\zeta = 0$ デ ζ の正則函数トナル。

6° (β) ハ $x, C x^\lambda$ が十分 = 小サイトキ收斂デ、ソノ和ガ (A) の解トナル。

証明ノ方針 1° 先ヅ N が十分 = 大キイトキ次ノ定理ヲ証明スル。

豫備定理1. 「正ノ数 $\delta = \delta(K, R) (> 0)$ ヲ十分 = 大キク取ッテ

$$\begin{cases} \theta_1 + \delta + \xi' \tan \omega_1 < \eta' < \theta_2 - \delta + \xi' \tan \omega_2 \\ \alpha' \leq -R, \quad \xi' \leq -R \end{cases}$$

$$\text{トキ } \tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad -\infty < \sigma \leq \alpha' \text{ デ}$$

$$(C'') \quad \frac{dz}{d\sigma} = (1 + i \tan \theta_0) g(t, \zeta, z) \quad (\zeta = \lambda t + \Gamma)$$

ハ

$$(1) \quad |z| \leq K \{ e^{(N-1)\sigma + \xi} + e^{N\xi} \}$$

ヲ満足スル解ヲ持ツ。但

$$\begin{cases} \tau' = \tau_0 + \sigma' \tan \theta_0, & z' = \sigma' + i\tau' \\ \zeta = \xi + i\eta = \lambda t + \Gamma, & \zeta' = \xi' + i\eta' = \lambda t' + \Gamma \end{cases}$$

デアール」

豫備定理 2. 「 $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \rightarrow -\infty$ トキ
 $z = O(e^{M\sigma})$ ヲ満足スル (C') ノ解ハ $-\infty < \sigma \leq \alpha'$ デ
 (1) ヲ満足スルヤウニ $N =$ 関係シタイ M ヲ取ルコトが出来ル」

コレが証明サレタトスレバ N がアルキマツタ値 N_0 ヲ
 取ツタトキ 豫備定理 1 デ存在スルコトが余ツタ解ヲ

$$y = \varphi(t, \zeta) - \sum_{j+k \leq N_0} \alpha_{jk} e^{j\tau + k\zeta}$$

デアラス、勝手ナ $N =$ 對シテ

$$z = \varphi(t, \zeta) - \sum_{j+k \leq N} \alpha_{jk} e^{j\tau + k\zeta}$$

ハ (C'') ノ解デアルカラ 予備定理 2ニ依ツテソレハ (1) ヲ満足スル、コレデ $\varphi(t, \zeta)$ が (β') ナル形ニ、或ハ $\log \varphi(t, \zeta)$ が (β'') ナル形ニ展開サレルコトヲ知ル。

$$2^{\circ} \quad \psi(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta) - \sum_{j+k \leq N} \alpha_{jk} e^{j\zeta + k\zeta}$$

が ζ = 関シテ正則ナルコトヲ証明スレバヨイ、ソレニハ (C'') ノ解 $\Sigma = \psi(t, \lambda t + \Gamma)$ が Γ = 関シテ微分出来ルコトヲ証明スレバヨイ。

$$3^{\circ} \quad \varphi(t, \zeta + 2\pi i) = \varphi(t) + 2\pi i = \text{注意スレバヨイ。}$$

4 $^{\circ}$ $t = t_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \rightarrow -\infty$ ノトキ (1) ヲ満足スル (C'') ノ解 $\Sigma = \psi(t, \zeta)$ ヲ取ル。 $\sigma' + i t' = t'$ ヲ半直線 $t = t_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \leq \sigma_0$ ノ上ニ取レバ $\Sigma = \psi(t, \zeta)$ が $(t', \zeta') =$ 於イテ (1) ヲ満足シテキルカラ、更ニ (C'') ノ解 $\psi(t, \zeta)$ が $t = t' + (\sigma - \sigma') \tan \theta' +$ 半直線ノ上ニ満足シテキル不等式ヲ求メル、 θ' ハ計算ニ都合ガヨイモノニキメル。

$$5^{\circ} \quad \varphi(t, \zeta + 2\pi i) = \varphi(t) + 2\pi i = \text{注意スレバヨイ。}$$

6 $^{\circ}$ $\varphi_n(t)$ が $2\pi i$ ヲ週期トスルコトヲ証明スレバヨイ、コレハ $\varphi_n(t)$ が満足スベキ線形微分方程式ヲ求メテ見レバ分ル。

[注意] $(I, i, 5) =$ 於テ $t = t_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \leq \sigma_0$ ノ半直線ハ

$$t_1 + \sigma \tan \theta_1 < t < t_2 + \sigma \tan \theta_2$$

ニ含マレ、且ツ $\mu - \nu \tan \theta_0 > 0$ トナルヲウナ勝手ナモノヲ取ツテヨイ。