



Title	G. Golusinノ新定理
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 94, p. 13-20
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74350
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

425. G. Golusin, 新定理

城 憲 三 (阪大工)

$$(1) \quad F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

ヲ $|z| < 1$ デ正則單葉ナ函数トスル、最近 Golusin ハ K. Löwner ノ方法ヲ利用シテ驚クベキ次ノ諸定理ヲ *Recueil Math.*ニ発表シタ、コレヲ御紹介シタイ。

$$1) \quad \left| \arg \frac{F(z)}{z} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \left| \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

$$2) \quad \left| \arg F'(z) \right| \leq \left. \begin{array}{ll} 4 \arcsin |z| & \text{bei } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} & \text{bei } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| < 1. \end{array} \right\}$$

$$3) \quad \left| \arg \frac{z^2 F'(z)}{\{F(z)\}^2} \right| \leq -\log(1-|z|^2).$$

[注意] 1)ハ Grunsky-Grötzsch: 定理デアルガ、コレヲ導キ出スノ = 多クノ予備知識ヲ必要トシ尙單ナ別証明が要求オレタキタ。コレが実現シタノデアル。

2) ハ驚アベキ新発見デアル、誰モが知り得ナカッタ *Drehungssatz*!
 ソノ正体ガ分ツタノデアル。

3) モ亦新発理デアル。単位円ノ内部、外部デ正規化シタ單葉函数ノ
Drehungssatz ハコノ発理ガ見事相関聯セシメラレ、*Löwner*,
Grunsky, *Grötzsch* ノ結果ガ彌シク融合スル。

§ 1. K. Löwner ノ理論

$$\max_{|z|=r} |F(z)| = M, \quad (0 < r < 1) \quad \text{トシテ} \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{M} \quad \text{ナル} \beta \text{ヲ}$$

(1) ノ右辺 = 乗シ、函数

$$(2) \quad f(z) = \beta (z + a_2 z^2 + \dots)$$

ヲ考ヘルト、 $f(z)$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

i) (2) ハ E.K. (*Einheitskreis*) ヲ E.K. = フクマレル

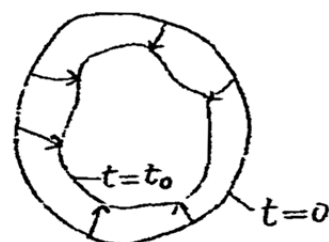
面分 = ヲツス。

ii) $f(0) = 0, f'(0) = \beta > 0$. 勿論 $\beta \leq 1$.

Löwner ハ (2) ヲ次ノ様ニ見た。

$$(3) \quad f(z, t) = \beta(t) \{z + a_2(t) z^2 + \dots\}, \quad \text{f-plane}$$

$$(0 \leq t \leq t_0, |z| < 1, \beta = \beta(t))$$



即チ f ハ実数 t (例ヘバ t ハ時間) = 一樣連続 = 関係スルト

シ、 $t=0$ ノトキ f ハ *Identität* 即チ $f(z, 0) = z$ トレ、

$t=t_0$ ノトキ f ハ (2) = ナルト考ヘタ、 $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$ ガ存在シタ、

t , 連続函数トスル。

特 =

$$(4) \quad \left(\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = V(z)$$

トオケバ、 t ガ時間ヲ表ハスナラ、 $f(z, t)$ ハ *Strömung*

ヲ表ハスシ、 $V(z)$ ハ最初 $t=0$ ノトキ、($t=t_0$ ノトキ $f(z, t)$)

トナルベキ) Geschwindigkeitsfeld を 定める. Schwarz Lemma を

$$|f(z, t)| \leq |z| \quad \text{identisch in } t.$$

だから 物理的 = 考へて vector $V(z)$ の方向 $z \rightarrow 0$ と角 $\leq \frac{\pi}{2}$ を 示す、即ち

$$p(z) = -\frac{\nabla(z)}{z}, \quad \nabla(z) = -z p(z)$$

ト オケバ $|z| < 1$ で

$$\operatorname{Re} p(z) \geq 0$$

$z=0$ と $z=0$ を 通る Strömung の 固定シテ オク カラ

$\nabla(0)=0$, $\nabla'(0) = \text{實数}$, $p(z)$ の 故 = $|z| < 1$ で 正則 で $p(0)$ の 實数.

ソ コ デ 今 微分方程式

$$(5) \quad \frac{dw}{dt} = -w p(w, t)$$

= 於て $p(w, t)$ の $|w| < 1$, $0 \leq t \leq t_0$ で 連続 且つ 上ノ 性質ヲ リトシ, コノ 解 w が 次ノ 性質ヲ 持ツ モ ノ ト スル

$$(6) \quad \begin{aligned} w &= f(z, t) \\ f(z, 0) &= z \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} |z| < 1 \\ 0 \leq t \leq t_0 \end{array} \right)$$

p の 性質カラ $|f(z, t)|$ は z を キメルト t の 減少函数 (少ク トモ nicht zunehmende). 果ナル Anfangswerten z カラ $t = t_0$ 迄 異ナツタ w が 生ズル、だから (6) の $0 \leq t \leq t_0$ へ レ スベテ $t =$ 對シテ $\text{beschränkt + schlichte Abbildung}$ を 定ムル. Löwner の $p(w, t)$ トシテ

$$p(w, t) = \frac{1+k(t)w}{1-k(t)w} \quad |k(t)|=1, \quad (k(t): \text{連続})$$

ヲ選ビ、スベテノ *beschränkte Abbildung* ハ如何程 = $\in$ *beschränkten Schlichtabbildungen* デ *approximieren* スルコトが出来ルコトヲ用ヒ、次ノ結論=達シタ。

$$(7) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1+k(t)f(z, t)}{1-k(t)f(z, t)}$$

トスルトキ、任意ノ *beschränkte Schlichtabbildung* $b(z) = \beta(z + a_2 z^2 + \dots)$ = 對シテ、一意的=キマル連続函数 $k(t)$ ($0 \leq t \leq t_0 = \log \frac{1}{\beta}$), $|k(t)| = 1$ ガアツテ (7) ノ解ガ條件 $f(z, 0) = z$ テ満足シ、 $t = t_0$ ノトキ $b(z) = f$ ル。

[注意] $k(t)$ ヲ共ヘタラ (7) ハ *Schlichtabbildung* ヲ共ヘルトハ限ラナイガ (7) ノ解ハ畢竟=ナルコトハ上述ノ通り合ツテキツ。

§2. *Schlicht approximation* = ヨリ吾人ハ (7) ヲ出発ノ關係式トスルノデアル、之レガ *Golusin* 其人ノ考ヘデアル。

$$(7) \text{ヨリ} \quad \frac{\partial \log f}{\partial t} = - \frac{1+k(t)f(z, t)}{1-k(t)f(z, t)}$$

両辺ノ實數部分ヲ考ヘテ

$$\frac{1}{|f|} \frac{\partial |f|}{\partial t} = - \frac{1-|f|^2}{|1-k(t)f(z, t)|^2}$$

依ツテ

$$(8) \quad \frac{\partial |f(z, t)|}{\partial t} = -|f(z, t)| \frac{1-|f(z, t)|^2}{|1-k(t)f(z, t)|^2}$$

I. *Bieberbach* / *Verzerrungssatz* / 証明

(8) ヨリ

$$-|f| \frac{1+|f|}{1-|f|} \leq \frac{\partial |f|}{\partial t} \leq -|f| \frac{1-|f|}{1+|f|}$$

是ヲ固定スレバミハルト同シダカラ

$$\frac{1-|f|}{|f|(1+|f|)} d|f| \geq -dt, \quad \frac{1+|f|}{|f|(1-|f|)} \leq -dt.$$

第一不等式ヨリ

$$\frac{|f|}{(1+|f|)^2} \geq e^{-t_0} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

第二不等式ヨリ

$$\frac{|f|}{(1-|f|)^2} \leq e^{-t_0} \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

$$e^{-t_0} = \beta \text{ テアルカラ}$$

$$(9) \quad \frac{\beta |z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\beta |z|}{(1-|z|)^2}$$

コレカラ次ノ事柄ニ合ル。

$$(10) \quad \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |F'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

$$(11) \quad \frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

II. (9) ヨリ

$$d \arg f = -\mathcal{I} \left(\frac{1+Kf}{1-Kf} \right) dt = -\frac{2\mathcal{I}(Kf)}{|1-Kf|^2} dt,$$

$$|d \arg f| \leq \frac{2|f|}{|1-Kf|^2} dt.$$

然ルニ (8) ヨリ

$$(12) \quad dt = -\frac{|1-Kf|^2}{1-|f|^2} \cdot \frac{d|f|}{|f|}$$

デマールカヲ

$$|d \arg f| \leq -\frac{2d|f|}{1-|f|^2}.$$

從ツテ

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \int_{|f(z)|}^{|z|} \frac{2d|f|}{1-|f|^2} \leq \int_0^{|z|} \frac{2d|f|}{1-|f|^2} = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

故ニ

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

從ツテ容易ニ次ノ結果が得ラレル。

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

III.

$$(13) \quad \left| \arg F'(z) \right| \leq \begin{cases} 4 \arcsin |z|, & |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| < 1 \end{cases}$$

証明

$$f' = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \text{ ト ス レ バ (7) ヲ リ}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = -f' \cdot \frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}.$$

從ツテ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \arg f'}{\partial t} &= -\Im \left(\frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2} \right) = -\frac{\Im(4kf-2k^2f^2)}{|1-kf|^4} \\ &= \frac{2\Im\{(1-kf)^2\}}{|1-kf|^4}, \end{aligned}$$

即ち (12) を代入し

$$|d \arg f'| = \frac{2|\Im\{(1-kf)^2\}|dt}{|1-kf|^4} = \frac{2|\Im\{(1-kf)^2\}|}{|1-kf|^2} \cdot \frac{-d|f|}{(1-|f|^2)|f|}.$$

而シテ左方 = 於イテ

$$\frac{|\Im\{(1-kf)^2\}|}{|1-kf|^2} = |\sin 2 \arg(1-kf)| \leq \sin 2 \arcsin |f| = 2|f|/\sqrt{1-|f|^2},$$

$$|f| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|f| < 1.$$

デアルカレ,

$$|d \arg f'| \leq \frac{-4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}}, \quad |f| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-2d|f|}{(1-|f|^2)|f|}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |f| < 1.$$

故 = $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ

$$|\arg f'(z)| \leq \int_{|f(z)|}^{|z|} \frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} \leq \int_0^{|z|} \frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} = 4 \arcsin |z|,$$

$|z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ

$$|\arg f'(z)| \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{|z|} \frac{2d|f|}{(1-|f|^2)|f|},$$

$$|\arg f'(z)| \leq \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \quad (\text{証明終})$$

$|z| = \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ

$$F(z) = \int_0^z \frac{(1-e^{i\alpha}z)}{(1-e^{-i\alpha}z)^3} dz = z + \dots, \quad \alpha = \arccos \rho$$

トセハ $|\arg F'(\rho)| = 4 \arcsin \rho.$

IV.

$$(14) \quad \left| \arg \frac{z^2 F'(z)}{\{F(z)\}^2} \right| \leq \log \frac{1}{1-|z|^2}$$

証明. (17) より

$$\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial t} = -\frac{1}{f} \frac{1 + \frac{1}{kf}}{1 - \frac{1}{kf}}. \quad \text{即ち} \quad \frac{\partial \log \frac{1}{f}}{\partial t} = -\frac{1 + \frac{1}{kf}}{1 - \frac{1}{kf}}$$

デアルカラ

$$\begin{aligned} \left| d \arg \frac{f'}{f^2} \right| &= \frac{2 \left| \Im \left\{ \left(1 - \frac{1}{kf} \right)^2 \right\} \right|}{\left| 1 - \frac{1}{kf} \right|^4} dt = \frac{2 \Im \left\{ \left(1 - \frac{1}{kf} \right)^2 \right\}}{\left| 1 - \frac{1}{kf} \right|^2} \cdot \frac{-|f| d|f|}{1-|f|^2} \\ &\leq \frac{2|f| d|f|}{1-|f|^2}, \end{aligned}$$

$$\left| \arg \frac{z^2 f'}{f^2} \right| \leq \int_0^{|z|} \frac{2|f| d|f|}{1-|f|^2} = \log \frac{1}{1-|z|^2}. \quad (\text{証明終})$$

$\Phi(\zeta) = \zeta + c + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots$ 7 $|\zeta| > 1$ テ正則單葉トスレバ

次ノ $F(z)$ ハ E, K 内正則單葉,

$$F(z) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{z}\right) - c} = z + \dots$$

トコロガ $\Phi'(\zeta) = \frac{z^2 F'}{F^2}$ デアルカラ

$$(15) \quad \left| \log \Phi'(\zeta) \right| \leq \log \frac{1}{1-|\zeta|^2} = -\log(1-|\zeta|^2)$$

[Grunsky, 定理]