



Title	射影幾何ノ基本定理ニツイテ
Author(s)	栗田, 稔
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 94, p. 22-25
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74352
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

427. 射影幾何ノ基本定理 = ツイテ

栗 田 稔 (東大學生)

Von Staudt ノ定理

一ツノ射影直線上ノ点変換 $x' = f(x)$ = 於イテ

1° 對應ハ一對一

2° 調和列点ハ調和列点ニウツル。

トキハ、コノ変換ハ射影変換ニ外ナラナイ。

コノ定理ハ *synthetisch* = ハ既ニ証明サレテキマス
1 = (例ハバ Blaschke: *Differentialgeometrie* III
§ 50) *analytisch* ナ証明デハ手許ニアレニ、三ノ書デ
イツレモ連続性ヲ假定シテキマス、之レヲ假定シナイ *analy-*

tisch + 証明ヲ次 = 試ミテミマス、先ツ

lemma. 一價函数 $f(x)$ が

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

ヲ満足シ且ツ任意ニ小ナル $\varepsilon = 0$ ノ近傍デハ常ニ

$$x > 0 \text{ ナラバ } f(x) > 0$$

$$\text{トナルトキハ } f(x) = cx \quad c > 0$$

デアル。

証明. 通常行ハルル証明ニヨリ

$$x \text{ が有理数ナラバ } f(x) = xf(1).$$

$$\text{又 } y = 0 \text{ カラ } f(0) = 0$$

$$\text{従ツテ } f(-x) = -f(x)$$

次ニ十分近いニ数 a , $a + \varepsilon$ ヲトルトキ $\varepsilon > 0$ トスレバ
假定ニヨリ

$$f(a + \varepsilon) - f(a) = f(a + \varepsilon) + f(-a) = f(\varepsilon) > 0$$

即チ $f(x)$ ハ單調増加デアル。然ルニ x が有理数ナルト
キ $f(x) = xf(1) + 1$ ナカレバ常ニ

$$f(x) = xf(1)$$

定理ノ証

先ツ對應スル三点ヲトリ、各点列ニソレゾレ適當ニ射影
変換ヲ施シテ先ニトツテ對應スル三点ノ對テ $0 = \infty$ /
 $= \infty$ /, $\infty = \infty$ / が對應スルヌウニスル、サウスレバ問
題ハ

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = -1 \text{ ナルトキハ常ニ}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{f(x_1) - f(x_3)} : \frac{f(x_2) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_4)} = -1$$

トナル函数 $f(x)$ ハ $x = 0$ 他ナラナイコトヲイフコト = ナリ
マス。

$$x_4 = \infty \quad \text{トレバ} \quad f(x_4) = \infty \quad \text{カ}$$

$$x_1 + x_2 = 2x_3 \quad \text{ナルトキ} \quad f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_3)$$

$$\text{即チ} \quad f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$x_2 = 0 \quad \text{トオケバ} \quad f(0) = 0 \quad \text{ナルコト} = \text{ヨリ}$$

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{従ッテ} \quad f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

$$\text{ソレデ} \quad f(x) \pm f(y) = f(x \pm y)$$

$$x_1 - x_3 = p, \quad x_2 - x_3 = q, \quad x_1 - x_4 = r, \quad x_2 - x_4 = \delta \quad \text{トオケバ}$$

$$\frac{p}{r} : \frac{q}{\delta} = -1 \quad \text{ナルトキ} \quad \frac{f(p)}{f(r)} : \frac{f(q)}{f(\delta)} = -1$$

$$\text{トナル、所ガ} \quad p - q = r - \delta.$$

$$\text{ソレデ} \quad r = p \frac{p - q}{p + q} \quad \delta = -q \frac{p - q}{p + q}$$

$$\text{従ッテ} \quad f(p)f(\delta) + f(r)f(q) = 0 \quad \text{カ}$$

$$f(p) + \left(-q \frac{p - q}{p + q}\right) + f\left(p \frac{p - q}{p + q}\right)f(q) = 0$$

$$p + q = 2u \quad p - q = 2v \quad \text{トオケバ}$$

$$f(u+v)f\left(-\frac{v}{u}\right) + f\left(\frac{v}{u}\right)f(u-v) = 0$$

$$\text{之カ} \quad f(u)f\left(\frac{v^2}{u}\right) = \{f(v)\}^2$$

$$u, v \text{ハ独立} \quad \text{カ} \quad u = 1 \quad \text{トオクトキ} \quad f(1) = 1 \quad \text{ナルコトヲ用}$$

ヒレバ

$$f(v^2) = \{f(v)\}^2 \geq 0$$

即チ $x > 0$ ナル限リ $f(x) \geq 0$

$f(x) = 0$ トナルコトハナイ、ソレハモシ一度ナレバ $f(x) \equiv 0$
トナルカラ

ソレデ $x > 0$ ナラバ $f(x) > 0$

従ツテ $f(x) = xf(1) = x$ 即チ証明サレタ。

以上ノコトヲ用ヒレバ二次元以上デモ射影幾何ノ基本定理

「 n 次元射影空間ノ一対一点對應デ直線ヲ直線ニマッスモ
ノハ射影変換ニ限ル」

が連続ノ假定ナシニ *analytisch* = 出テクルト思ヒマス。

$n = 2, 3$ ノトキハスグニ出マス。

尚、*trivial* ナコトデスガ *von Staudt* ノ定理デー
對一トイフ代リニ

三双ノ對應点が一對一デ $f(x)$ が一價

トオキカヘテモ上ノ証明ニハ差支ヘナイト思ヒマス。

以上何カ大キナ誤リデモシテキル様デシタラ御教示ヲ願ヒマ
ス。(— 11.6.6 —)