



Title	Linear Operationニツイテ (V)
Author(s)	泉, 信一; 北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 95, p. 13-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74356
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

431. Linear Operation = ツイテ (V)

泉 信 (東北大)

北川 敏男 (阪大)

コノ論文ノ目的ハ、Linear Operationガ translatable = ナルタメノ条件ヲ求メルコトニアル。

1. $p > 0$ トスル。 $(L^p) = L^p(0, 2\pi)$ ヲ $(0, 2\pi)$ = 於
イテ絶対値ノ p 乗ガ (Lebesgueノ意味ヲ) 積分可能ナ函
数ノツクル空間トスル。 $f(x) \in (L^p)$ ナルトキ

$$\|f\| = \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx}$$

トオキ、之ヲ $f(x)$ ノ norm トイフ。然ルトキ (L^p) ハ
(Banachノ意味ヲ) normalised space = ナル。

次ニ $\Lambda(f)$ ハ $f(x) \in (L^p)$ ヲ $g(t) \in (L^q)$ = 変換スル
linear Operation トスル。之ヲ次ノ様ニ表ス:

$$\Lambda(f) = \Lambda_x \{t, f(x)\} = \Lambda \{t, f(x)\}$$

(L^p) 及び (L^q) = 属スル各々, $f(x)$ 及び $g(t)$ 一對シテ
periodic Continuation ヲ施シテアルト考ヘル。 $f(x)$
 カテ $f(x+a)$ ヲツクル *Operation* ヲ T_a デ表ハス。 Λ が
 任意ノ実数 a ト常ニ *permutable* ナルトキ, 即チ

$$T_a \Lambda \{t, f(x)\} = \Lambda \{t, T_a f(x)\} \dots \dots \dots (1)$$

ナルトキ Λ ヲ *translatable* トイフ。

定理 1. Λ が *translatable* ナルトキノ必要且ツ充
 分條件ハ $\lambda = 2n\pi i$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$) =
 對シテ

$$\Lambda \{t, e^{\lambda x}\} = G(\lambda) e^{\lambda t} \dots \dots \dots (2)$$

トナルコトデアアル。コトニ $G(\lambda)$ ハ λ ノミノ函数デアアル。

証明: Λ が *translatable* ナラバ, 即チ (1) が成立ス
 レバ, (1) = 於テ $f(x) = e^{\lambda x}$ トオクトキ

$$\begin{aligned} \Lambda \{t+a, e^{\lambda x}\} &= T_a \Lambda \{t, e^{\lambda x}\} = \Lambda \{t, T_a e^{\lambda x}\} \\ &= \Lambda \{t, e^{\lambda(x+a)}\} \end{aligned}$$

即チ

$$\Lambda \{t+a, e^{\lambda x}\} = e^{\lambda a} \Lambda \{t, e^{\lambda x}\}$$

故ニ

$$g_\lambda(t) = \Lambda \{t, e^{\lambda x}\}$$

トオケバ

$$g_\lambda(t+a) = e^{\lambda a} g_\lambda(t)$$

然ルニ, コノ式ハスベテノ a = 對シテ成立スルカラ, $g_\lambda(t_1)$

が有限デアアルヌウナ t_1 ヲトシ, $a = t - t_1$ トスレバ

$$g_\lambda(t) = g_\lambda(t_1) e^{\lambda(t-t_1)}$$

ヨツテ $e^{-\lambda t}, g_\lambda(t) = G(\lambda)$ トオクトキ (2) ヲ得ル。故ニ條件ハ必要ナラズ。

次ニ條件ノ十分ナコトヲ証明シヨウ。 $f(x) \in (L^p)$ トスルトキ $\Lambda(f)$ ノ linear ナルコトカラ、ヨク知ラレク Banach ノ定理ニヨリ

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |\Lambda\{t, f(x)\}|^q dt \leq G^p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \dots (3)$$

トナルマウナ定数 $G \geq 0$ ガ $f(x) = \text{independent}$ = 存在スル。(1)

然ルニ F. Riesz ノ定理ニヨツテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^p dx = 0 \dots (4)$$

トナル様ナ $\{e^{n\pi i}\}$, polynomial seq. $\{P_n(x)\}$ ガ存在スル。(4) ノ成立スルマウナ $\{P_n(x)\} = \text{對シテ}$

$$f(x) = \text{l. m. p. } P_n(x)$$

ヲ表ハス。然ルトキ (3) カラ (4) ノ成立スルマウナ $\{P_n(x)\} = \text{對シテ}$

$$\Lambda\{t, f(x)\} = \text{l. m. q. } \Lambda\{t, P_n(x)\} \dots (5)$$

$$\text{今 } P_n(x) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_n, k e^{2k\pi i x} \text{ トオクトキ、任意、實}$$

數 $a = \text{對シテ}$

(1) (3) カラ必然的ニ

$$|G(2k\pi i)| \leq \frac{G}{\int_0^{2\pi}} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda\{t+a, f(x)\} &= \text{l.m.}^g_{n \rightarrow \infty} \Lambda\left\{t+a, \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} e^{2k\pi i x}\right\} \\
&= \text{l.m.}^g_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} \Lambda\{t+a, e^{2k\pi i x}\} \\
&= \text{l.m.}^g_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} G(2k\pi i x) e^{2k\pi(t+a)i} \\
&= \text{l.m.}^g_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} \Lambda\{t, e^{2k\pi(x+a)i}\} \\
&= \text{l.m.}^g_{n \rightarrow \infty} \Lambda\{t, P_n(x+a)\}
\end{aligned}$$

コレト (5) トヲ結合シテ

$$\Lambda(t+a, f(x)) = \Lambda_-(t, f(x+a)).$$

依ッテ定理ハ証明サレタ。

2. 定理 I, (L^p) 及ビ (L^g) ノ何レカ一方又ハ両方ヲ (C) デオキカヘタトキニモ成立スル。但シソノトキ F. Riesz ノ定理ヲ用キルカハリニ、Fejèr ノ定理ヲ用キレバヨイ。

更ニ E 及ビ E₁ ヲ (-∞, ∞) = 於イテ定義サレタ函数ノ normalised space トシ、Λ(f) ノ domain ガ E デソノ contra-don. ガ E₁ = 含マレテキルトスル、モシ任意ノ f(x) ∈ E = 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - P_n(x)\| = 0 \dots\dots\dots (6)$$

トナル様ヲ e^{λx}, polynomials, seq. {P_n(x)} が存在スルナラバ、定理 I ト同ジ方針ヲ進メルコトハ明カデ

アル。

特 = E が *almost periodic function* の \mathcal{H} の $space$ となるトキ、条件 (6) は満たされてアル。