OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Linear Operationニツイテ（Ｖ）
Author(s)	泉, 信一; 北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 95, p. 13-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74356
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

431. Linear Operation ニツイテ (V)

泉　信一 (東北大)
北川敏男 (阪大)

コノ論文ノ目的ハ、Linear Operation ガ translatable ニナルタメノ條件ヲ求メルコトニアル。

1. $p>0$ トスル。$(L^p)=L^p(0,2\pi)$ ヲ $(0,2\pi)$ ニ於イテ絶對値ノ p 乘ガ (Lebesgue ノ意味デ) 積分可能ナ函數ノツクル空間トスル。$f(x)\in(L^p)$ ナルトキ

$$\|f\|=\sqrt[p]{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx}$$

トオキ、之ヲ $f(x)$ ノ norm トイフ。然ルトキ (L^p) ハ (Banach ノ意味デ) normalised space ニナル。

次ニ $\Lambda(f)$ ハ $f(x)\in(L^p)$ ヲ $g(t)\in(L^q)$ ニ變換スル linear Operation トスル。之ヲ次ノ様ニ表ス:

$$\Lambda(f)=\underset{x}{\Lambda}\{t,f(x)\}=\Lambda\{t,f(x)\}$$

(L^p) 及ビ (L^q) ニ属スル各々ノ $f(x)$ 及ビ $g(t)$ ニ対シテ periodic Continuation ヲ施シテアルト考ヘル。$f(x)$ カラ $f(x+a)$ ヲツクル Operation ヲ T_a デ表ハス。Λ が任意ノ実数 a ト常ニ permutable ナルトキ，即チ

$$T_a\Lambda\{t, f(x)\} = \Lambda\{t, T_a f(x)\} \quad \cdots\cdots (1)$$

ナルトキ Λ ヲ translatable トイフ。

定理1. Λ が translatable ナレタメノ必要且ツ充分條件ハ $\lambda = 2n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm n, \cdots\cdots)$ ニ対シテ

$$\Lambda\{t, e^{\lambda x}\} = G(\lambda)\, e^{\lambda t} \quad \cdots\cdots (2)$$

トナルコトデアル。コヽニ $G(\lambda)$ ハ入ノミノ函数デアル。

証明: Λ が translatable ナラバ、即チ (1) ガ成立スレバ，(1) ニ於テ $f(x) = e^{\lambda x}$ トオクトキ

$$\Lambda\{t+a, e^{\lambda x}\} = T_a\Lambda\{t, e^{\lambda x}\} = \Lambda\{t, T_a e^{\lambda x}\}$$
$$= \Lambda\{t, e^{\lambda(x+a)}\}$$

即チ

$$\Lambda\{t+a, e^{\lambda x}\} = e^{\lambda a}\Lambda\{t, e^{\lambda x}\}$$

故ニ

$$g_\lambda(t) = \Lambda\{t, e^{\lambda x}\}$$

トオケバ

$$g_\lambda(t+a) = e^{\lambda a} g_\lambda(t)$$

然ルニ、コノ式ハスベテノ a ニ対シテ成立スルカラ、$g_\lambda(t_1)$ ガ有限デアルヤウナ t_1 ヲトリ、$a = t - t_1$ トスレバ

$$g_\lambda(t) = g_\lambda(t_1)\, e^{\lambda(t-t_1)}$$

ヨッテ $e^{-\lambda t_1} g_\lambda(t_1) = G(\lambda)$ トオクトキ (2) ヲ得ル。故ニ條件ハ必要デアル。

次ニ條件ノ十分ナコトヲ証明シヨウ。$f(x)$ ヲ (L^p) トスルトキ $\Lambda(f)$ ノ linear ナルコトカラ、ヨク知ラレタ Banach ノ定理ニヨリ

$$\sqrt[q]{\int_0^{2\pi} \left|\Lambda\{t, f(x)\}\right|^q dt} \leqq G \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx} \quad \cdots\cdots (3)$$

トナルヤウナ常数 $G \geqq 0$ が $f(x)$ = independent ニ存在スル。(1)

然ルニ F. Riesz ノ定理ニヨッテ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^p dx = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

トナル様ナ $\{e^{n\pi i}\}$ ノ polynomial seq. $\{P_n(x)\}$ ガ存在スル。(4) ノ成立スルヤウナ $\{P_n(x)\}$ ニ對シテ

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{l.m.}{}^p P_n(x)$$

ヂ表ハス。然ルトキ (3) カラ (4) ノ成立スルヤウナ $\{P_n(x)\}$ ニ對シテ

$$\Lambda\{t, f(x)\} = \underset{n\to\infty}{l.m.}{}^q \Lambda\{t, P_n(x)\} \quad \cdots\cdots (5)$$

今 $P_n(x) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} e^{2k\pi i x}$ トオクトキ、任意ノ實數 a ニ對シテ

---

(1) (3) カラ必然的ニ

$$|G(2k\pi i)| \leqq \frac{G}{\sqrt[q]{2\pi}} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

$$\Lambda\{t+a, f(x)\} = \underset{n\to\infty}{l.m.^g}\Lambda\left\{t+a, \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} e^{2k\pi i x}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.^g}\sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k}\Lambda\left\{t+a, e^{2k\pi i x}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.^g}\sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} G(2k\pi i x) e^{2k\pi(t+a)i}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.^g}\sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k}\Lambda\left\{t, e^{2k\pi(x+a)i}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.^g}\Lambda\left\{t, P_n(x+a)\right\}$$

コレト (5) トヲ結合シテ

$$\Lambda\{t+a, f(x)\} = \Lambda_-\{t, f(x+a)\}.$$

依ッテ定理ハ証明サレタ。

2. 定理1ハ (L^p) 及ビ (L^g) ノ何レカ一方又ハ両方ヲ (C) デオキカヘタトキニモ成立スル。但シソノトキ F. Riesz ノ定理ヲ用キルカハリニ、Fejèr ノ定理ヲ用キレバヨイ。

更ニ E及ビ E_1 ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於イテ定義サレタ函数ノ normalised space トシ、$\Lambda(f)$ ノ domain ガ E デソノ contra-don. ガ E_1 ニ含マレテキルトスル、モシ任意ノ $f(x)\in E$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-P_n(x)\| = 0 \qquad \cdots\cdots (6)$$

トナル様ナ $e^{\lambda x}$ ノ polynominals ノ seq. $\{P_n(x)\}$ ガ存在スルナラバ、定理1ト同ジ方針ヲ進メルコトハ明カデ

アル。

特ニ E が almost periodic function ノツクル space ナルトキ、條件(6)ハミタサレテヰル。