



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, X
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 96, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74359
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

434. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ、Ⅷ

福原満洲雄(北大)

特異点 (I, iii) λ ハ 0 デモ正ノ整数デモナク、考ヘテキ
ル範囲ニ $\mu - \nu \tan \theta > 0$ デアルマウナ θ ハ存在シナイカ
 $\mu - \nu \tan \theta = 0$ トナルマウナ θ ハ存在スル場合デアール、故
ニ假定 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ヲ取ルナラベ $\mu - \nu \tan \theta_0 = 0$ ノ場合、假
定 $4^\circ, 5^\circ$ ヲ取ルナラベ $\mu - \nu \tan \theta_1 = 0, \mu - \nu \tan \theta_2 < 0$
又ハ $\mu - \nu \tan \theta_1 < 0, \mu - \nu \tan \theta_2 = 0$ トナル場合デアール、
假定 6° ハ考ヘル必要ガナイ。尚ココデハ假定 $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ ノ
場合ニ除ク、何レノ場合ニシテモ $y = x^p$ ($p > 0$) ト置クコ
トニヨリ特異点 (I, iv) ノ場合ノ結果ヲ利用スルコトが出来ル。
此ノマウニシテ得ラレル結果ヨリ $3^\circ, 5^\circ$ ノ場合ニハモットヨ
イ結果が得ラレルガ、 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ノ場合ニハソレ程ノ期待ヲカ
ケラレナイ、例ヘバ 1° ヲ取ツテ考ヘル、特異点 (I, i) ノ場
合ニハ (β) ナル形ニ展開サレル (A) ノ解ガ含ム勝手ナ常数 C
ノ値ハ $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda} y = C$ ニヨツテ與ヘラレルガ、特異点
(I, iii) ノ場合ニハ (A) ノ解 $y = \varphi(x, Cx^\lambda)$ ガ (β) ナル形ニ
漸近的ニ展開サレルトイフダケデハ常数 C ノ値ト (A) ノ解ト
ノ間ノ對應ヲキメルコトが出来ナイ、($x \rightarrow 0$) トキ $Cx^\lambda \rightarrow 0$
トナラナイカラデアール、此ノ對應ヲキメルコトが出来ルノ
ハ

$$(1) \sum_n \beta_{jn} u^n = \psi_j(u)$$

が 0 でない収斂半径を持つ場合である、そこで此の場合を扱
 ったのである、 $\nu = \mu$ 假定 $3^\circ, 5^\circ$ を取って行なうこと
 である。

3° スベテノ $f = \sum_k a_{jk} y^k$ が 0 でない収斂半
 径を持つならば、級数 (1) は 0 でない収斂半径を持つ、 C が
 十分小さいとき (特異点 (I, i) の場合) は C が取れる値の範
 圍 = 制限はなかつた!、 (A') は

$$y = \psi_0(Ce^{\lambda t}) + o(1) \quad (t = t_0 + \sigma \tan \theta_0, \sigma \rightarrow -\infty)$$

を満足する解 $y = \varphi(t, Ce^{\lambda t})$ を持つ、 $\varphi(t, u)$ は

$$t = t_0 + \sigma \tan \theta_0, \sigma \rightarrow -\infty, u \rightarrow 0$$

を持つ

$$(\beta_1) \quad y \sim \sum \psi_j(u) e^{j t}$$

の形 = 展開される。

$5^\circ \quad \mu - \nu \tan \theta_0 = 0$ 且つ半直線 $t = t_0 + \sigma \tan \theta_0$,
 $\sigma \leq \sigma_0$ が

$$t_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq t \leq t_2 + \sigma \tan \theta_2$$

の内部 = 含まれるように t_0, θ_0 を取る、 $t = t_0 + \sigma \tan \theta_0$,
 $\sigma \rightarrow -\infty$ の場合 = 3° の場合の結果が使われるから (β'_1) の
 形 = 展開される (A') の解 $y = \varphi(t, Ce^{\lambda t})$ が存在する、
 この時 $\varphi(t, u)$ の漸近展開 (β'_1) は

$$t_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq t \leq t_2 + \sigma \tan \theta_2,$$

$$\sigma \rightarrow -\infty, u \rightarrow 0$$

が成立する。

証明の方針 先づ $\psi_j(u)$ が満足すべき線形微分方程式

ヲ作り、ソレカラ $u=0$ デ正則デアルヤウナ $\psi_j(u)$ が唯一通りニキマルコトヲ確メル、然イテ

$$y = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(u) e^{j\tau} + z$$

ト置キ、 z が満足スル方程式

$$\frac{dz}{d\tau} = H(t, u, z)$$

ヲ特異点 (I, i) ノ場合ト同様ナ方針デ取扱フ。

特異点 $(I, iv), (I, v)$ 以下述ベル定理ハ $(I, iv), (I, v)$ 何レノ場合ニモ通用スル。

$$\arg \lambda = w, \quad 0 \leq w < 2\pi$$

トスル、故ニ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ノ場合ハ

$$\mu - \nu \tan \theta_0 < 0$$

$$\text{即チ} \quad |\theta_0 + w - \pi| < \frac{\pi}{2}$$

$4^\circ, 5^\circ$ ノ場合ハ

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1, \quad \text{トキ} \quad \mu - \nu \tan \theta < 0$$

$$\text{即チ} \quad |\theta + w - \pi| < \frac{\pi}{2}$$

6° ノ場合ハ $\nu = 0, \mu < 0$ 即チ $w = \pi$ ト假定スルコトニナル。

$$1^\circ \quad -\frac{\pi}{2} < w_2 \leq \theta_0 + w - \pi \leq w_1 < \frac{\pi}{2}$$

トスル。

$$t^{(j)} = \sigma^{(j)} + i\tau^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots)$$

ハ半直線 $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \sigma \leq \sigma_0$ ノ上ニアツテ ∞ = 収斂スル点列、ソノトキ勝手ニ取ラレタ正ノ数 δ = 對シテ正

ノ數 R ヲ十分大キクトレバ (点列 $\{z^{(j)}\}$ = 關係シナイ),
此ノ半直線ノ上ニ連続テ $z^{(j)}$ デ取ル値 $\lambda = \lambda^{(j)}$ が

(2) $g_1 + \delta + p \tan \omega_1 < g < g_2 - \delta + p \tan \omega_2$, $p < -R$
= 属スル (A'') ノ解ハ存在シナイ。

2° 特ニ考ヘ直ス程ノコトハナイ。

3° 点列 $\{z^{(j)}\}$ ノ意味ハ 1° ト同ジ、 $\Delta(>0)$ が十分
= 小サケレバ半直線 $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0$, $\sigma \leq \sigma_0$ ノ上ニ連続
テ、 $z^{(j)} =$ 於テ取ル値 $y^{(j)}$ ノ絶對値が Δ ヲ超エナイマウ
ナ (A') ノ解ハ恒等的 = 0 デアル。

$$4^\circ \quad -\frac{\pi}{2} < \omega_2 \leq \theta_2 + \pi - \pi \leq \theta_1 + \pi - \pi \leq \omega_1 < \frac{\pi}{2}$$

トスル、曲線 $C: z = T(\sigma)$ ($-\infty < \sigma \leq \sigma_0$) ハ

(3) $\tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2$, $\sigma \leq \sigma_0$
= 含マレ、且ツ

$$\omega_2 \leq \arg T'(\sigma) + \pi - \pi \leq \omega_1$$

デアルトスル。

$$z^{(j)} = \rho^{(j)} + i\tau^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots)$$

ハ曲線 C ノ上ニアツテ ∞ = 收斂スル点列、ソノトキ勝手ニ
取テレタ正ノ數 δ = 對シテ正ノ數 R が十分大キケレバ
(点列 $\{z^{(j)}\}$ = ハ關係シナイ), C ノ上ニ連続、 $z^{(j)} =$ 於テ
取ル値 $\lambda = \lambda^{(j)}$ が (2) = 属スルマウナ (A'') ノ解ハ存在シ
ナイ。

5° 曲線 $C: z = T(\sigma)$ ($-\infty < \sigma \leq \sigma_0$) ハ (3) =
含マレ且ツ

$$\theta_2' = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \arg T'(\sigma), \quad \theta_1' = \overline{\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \arg T'(\sigma)}$$

ト置イタトキ

$$|\theta'_1 + \pi - \pi| < \frac{\pi}{2}, \quad |\theta'_2 + \pi - \pi| < \frac{\pi}{2}$$

トナルモ、トスル、点列 $\{t^{(j)}\}$ の意味ハ 4° ト同ジ、ソノ時 $\Delta (> 0)$ が十分ニ小サケレバ C ノ上デ連続、 $t^{(j)} =$ 於イテ取ル値 $y^{(j)}$ ノ絶對値ガ Δ ヲ超エナイマヲナ (A') ノ解ハ恒等的ニ 0 デアル。

6° 前ノ結果ニ於テ ($\pi = \pi$ デアルカラ) θ'_1, θ'_2 ヲ幾ラデモ $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ ニ近ク取ルコトガ出來ル、併シ $\theta'_1 = \frac{\pi}{2}, \theta'_2 = -\frac{\pi}{2}$ トスルコトガ出來ナイコトハ *Malmquist* ノ研究ニ依テモ明カデアル (彼ハ (I, V) ノ場合シカ考ヘテキナケレドモ)

証明ノ方針 以上ノ結果ハ次ノ補助定理カラ導キ出スノデアル。

補助定理 「 $\mathcal{F}(t, \lambda)$ ハ

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, & \sigma' \leq \sigma \leq \sigma'' \\ |\lambda - \lambda t - \pi| \leq \delta \end{cases}$$

デ連続デ

$$|e^{-\lambda} \mathcal{F}(t, \lambda) - \lambda| \leq A(e^{\sigma'} + e^{\sigma''})$$

ヲ満足シ、 $\mu - \nu \tan \theta_0 < 0$ 且ツ

$$A \left\{ e^{\sigma''} - \frac{e^{\sigma' + \delta}}{\mu - \nu \tan \theta_0} \right\} < \delta \cos \theta_0$$

デアルトスル、其ノトキ $t = t'$ デ $\lambda = \lambda'$ トナル (A'') ノ解ハ

$$\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$$

⇒連続デ

$$|\delta - \lambda t - \Gamma| \leq A \sec \theta_0 \left\{ e^{\sigma} - \frac{e^{p+\delta}}{\mu - \nu \tan \theta_0} \right\} < \delta$$

ヲ満足スル、値シ

$$t' = \sigma' + i\tau', \quad \tau' = \tau_0 + \sigma' \tan \theta_0,$$

$$\delta' = p' + i q' = \lambda t' + \Gamma$$

トスル。」

注意 以上ノ結果ニ依ツテ例ヘバ $\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0$,

$\sigma \leq \sigma_0$ ナル半直線ニ沿ツテ t が ∞ ニ近ヅクトキ (A'') 或ハ (A') ノ解ノ取ル値ハ考ヘテキル範囲外ニ出テシマフカラ、

ソノ解ノ漸近展開ガ求マル筈ハナイン、コレ以上精密ナ結果

ヲ要求スル必要ハナイト思フガ、此ノ場合ニモ形式的解 (β)

ガ無意味トナルワケデアイコトダケ注意シテ置カシ、例ヘバ

(I, iv, 3) ノ場合ニツイテ言ヘバ

「 $\varphi(t, u)$ ハ

$$\tau = \tau_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \leq \sigma_1, \quad |u| \leq \Delta,$$

デ定義サレ、此ノ中カラ (t, u) が ($\infty, 0$) ニ近ヅクトキ (β')

ナル形ニ展開サレ、而モ $y = \varphi(t, C e^{\lambda t})$ が (A') ノ解ヲ表ハ

スヤウニ勝手ナ常數 C ヲ導入スルコトが出来ル」 (I, i) ノ

場合ト異ナル所ハ C ノ導入ノ仕方が唯一通リデアイトイフコ

トデアル、以上デ總テノ場合ヲ通ジテ形式的解 (β) ノ意味ガ

明カトナツタワケデアアル。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ニ下サイ。

大阪市北区

大阪帝國大學
理學部數學教室

清水辰次郎

振替口座番號

大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。