435. Linear Operation ニツイテ (VI)

泉　信一（東北大）
北川敏男（阪大）

前論文（V）ニ於イテハ週期函数ニ関スル linear operation ガ translatable ニナルタメノ條件ヲ求メタ。本論文ニ於イテハ $(-\infty, \infty)$ ニ於イテ定義サレタ函数ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於イテ定義サレタ函数ニ変換スル或ル種ノ operation ニツイテ論ジ、合セテ translatable ニナルタメノ條件ヲ求メル。

1. E 及ビ E_1 ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於イテ定義サレタ函数ノ spaces トシ、各々ノ $f(x) \in E$ ハ任意ノ有限區間デ $|f(x)|^p$ ガ積分可能デ、且ツ各々ノ $g(x) \in E_1$ ハ任意ノ有限區間デ $|g(x)|^q$ ガ積分可能デアルトスル。

今 $f(x)$ ヲ $g(t)$ ニカヘル Operation Λ 即チ

(1)　$g(t) = \Lambda(f)$

ヲ考ヘル。$\mathfrak{M}$ 及ビ $\mathfrak{N}$ ヲ夫々 x-axis 及ビ t-axis 上ノ sets トシ、ソノ l.u.b ガ共ニ >0 デ、g.l.b ガ共ニ <0 トスル。$\mathfrak{M}_x$ 及ビ $\mathfrak{N}_t$ ハ、$\mathfrak{M}$ 及ビ $\mathfrak{N}$ ガ夫々 x 及ビ t ダケノ translations ヲウケタ sets ヲ表ハスモノトスル。（從ツテ $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$ デアル）

$g(t)$, $\mathfrak{N}_u$ ニ属スル殆ンドスベテノ点ニ於ケル値ハ、$\Lambda(f)$ ニヨリ、$\mathfrak{M}_u$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値ニヨツテ定マルモノトスル。乃チ、$f_1(x) \in E$ ガ $\mathfrak{M}_u$ ニ於イテ $f(x)$ ト一致シテ

居ルナラバ，$\mathfrak{M}_u$ 外デ如何ナル値ヲトラウトモ、殆ンドスベテノ $t\in\mathfrak{N}_u$ ニ對シテ

$$(2)\qquad \Lambda\{t, f_1(x)\}=\Lambda\{t, f(x)\}$$

簡單ノタメニ、$\mathfrak{M}$ 及ビ $\mathfrak{N}$ ヲ區間ニトリ

$$(3)\qquad \mathfrak{M}=(\alpha,\beta)\quad 及ビ\quad \mathfrak{N}=(\gamma,\delta)$$

トスル。コノ二區間ガ Open デアルカ、closed デアルカハ後デ必要ニ應ジテ區別スル。

今 $\mathfrak{M}_{x_1}\cdot\mathfrak{M}_{x_2}\neq 0$, $\mathfrak{N}_{x_1}\cdot\mathfrak{N}_{x_2}\neq 0$ トスル。然ルトキ $\mathfrak{N}_{x_1}\cdot\mathfrak{N}_{x_2}$ ニ於ケル殆ンドスベテノ t ニ對シテ、$g(t)$ ハ $\mathfrak{M}_{x_1}$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値及ビ $\mathfrak{M}_{x_2}$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値ニヨッテ定マル。故ニ $f_1(x)$ ガ $\mathfrak{M}_{x_1}$ デ $f(x)$ ト一致シテオルナラバ、$\mathfrak{M}_{x_2}-\mathfrak{M}_{x_1}$ ニ於イテ如何ナル値ヲトラウトモ，$g(t)=\Lambda\{t, f(x)\}$ ノ $\mathfrak{N}_{x_1}\cdot\mathfrak{N}_{x_2}$ ニ於ケル殆ンドスベテノ点ニ於ケル値ハ變ラナイ。又 $f_2(x)$ ガ $\mathfrak{M}_{x_2}-\mathfrak{M}_{x_1}$ ニ於イテ $f_1(x)$ ト一致シテ居ルナラバ，$\mathfrak{M}_{x_1}-\mathfrak{M}_{x_2}$ ニ於イテ如何ナル値ヲトラウトモ，$g(t)=\Lambda\{t, f(x)\}$ ノ $\mathfrak{N}_{x_1}\cdot\mathfrak{N}_{x_2}$ ニ於ケル値ハカハラナイ。故ニ、$\Lambda\{t, f(x)\}$ ノ値ハ $\mathfrak{M}_{x_1}\cdot\mathfrak{M}_{x_2}$ ニオケル $f(x)$ ノ値ニヨッテ定マル。故ニ次ノ四ツノ場合ガオコル。

$$(4)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \mathfrak{M}=\mathfrak{N} \\ \text{(ii)} & \mathfrak{M}<\mathfrak{N} \\ \text{(iii)} & \mathfrak{M}\supset\mathfrak{N} \\ \text{(iv)} & \mathfrak{M}-\mathfrak{N}\neq 0,\quad \mathfrak{N}-\mathfrak{M}\neq 0 \end{cases}$$

2. (i) ノ場合ニハ、殆ンドスベテノ t ニ對シテ

$g(t)=\Lambda\{t, f(x)\}$ ハ，$f(x)$，t ノ近傍ニオケル値ニダケ depend シテ定マル。
例ヘバ，$f(x)$ ノ各点ニオケル Cesàro sum ヲ $g(t)$ トスルトキ、カヽル Operation ハコノ場合ニナル。

(ii) ノ場合ニハ，$\mathfrak{M}_{x_1} \cdot \mathfrak{M}_{x_2}=0$，$\mathfrak{N}_{x_1} \cdot \mathfrak{N}_{x_2} \neq 0$ トナルヤウナ x_1 及ビ x_2 ヲトルコトガ出来ル。故ニ、スベテノ $f(x) \in E$ ガ一定ノ定数デアルカ、又ハスベテノ $g(x) \in E_1$ ガ一定ノ定数ノ場合ニ限リ $\Lambda(f)$ ガ意味ヲモツ。

(iii) ノ場合ニハ，殆ンドスベテノ t ニ對シテ $g(t)$ ハ $t \in \mathfrak{N}_{t_1}$ トナルヤウナスベテノ t_1 ニ對シテ $\mathfrak{M}_{t_1}$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値ニヨツテ定マル。乃チ $\prod_{t_1} \mathfrak{M}_{t_1}$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値ニヨツテ定マル。故ニ、$\mathfrak{M}$ 及ビ $\mathfrak{N}$ ガ與ヘラレルトキ、殆ンドスベテノ t ニ對シテ $g(t)$ ハ closed interval $[t-\gamma+\alpha,\ t+\delta-\beta]$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値ニヨリ定マル。
例ヘバ $K(x) \in L^q(a, b)$ トスルトキ

$$\Lambda(f)=\int_a^b f(x+t) K(x)\, dx$$

トオクトキ operation ハコノ場合ニナル。

(iv) ノ場合ニハ，$g(t)$ ノ代リニ $g(t+c)$ ヲ考ヘ、c ヲ適當ニトルトキ、(i)，(ii) 及ビ (iii) ノ場合ニ帰着サセ得ル。

3. 以下 (iii)，並ビニ (iii) ニ reduce 出來ル (iv) ノ或ル場合ニ於イテ Λ ニ關シテ linear Operation デアルト

假定スル。然ルトキ

定理．Λ ガ *translatable* ニナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\Lambda\{t, e^{\lambda x}\} = G(\lambda)\, e^{\lambda t}$$

トナルコトデアル。コヽニ、$G(\lambda)$ ハ λ ノミノ函数デ λ ハ *purely imaginary* デアル。

証明ハ（V）ノ定理1ト大体ニ於イテハ同様デアル。

4. E及ビ E_1 ノ一方又ハ両方ガ任意ノ有限ノ点デ連続ナ函数カラ成ル *space*（C）ノ場合ニモ同様ナ結果ヲ得ル。

但シ、コノ場合ニ例ヘバ、$E = E_1 = (C)$ ナルトキニハ、$(\xi + a, \xi + b)$ ガ *open* デアルカ *closed* デアルカニヨッテ1°ノ場合ガ二ツノ場合ニ分レル。例ヘバ，$(\xi + a, \xi + b)$ ガ *open* ナルトキ $f(x)$ ノ ξ ノ近傍ニオケル値ニヨッテ $g(\xi)$ ガキマリ $(\xi + a, \xi + b)$ ガ *closed* ナルトキニハ $f(\xi)$ ノ値ニヨリ、$g(\xi)$ ガ定マル。

次元論プリント

P. Alexandroff: Dimensionstheorie (Math. Ann. Bd. 106) ノプリントハ今進行中デス。ソノ實費金壹円也、但シ送料ハ別デス。四六倍判 130 程。

送料ノ確定値ハ分リマセンガ約十銭トシテ前金デ願ヒマス、出來次第御送リシマス。