



Title	非同次型線状移動可能函数方程式ニ就イテ（Ⅱ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 96, p. 10-18
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74361
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

436. 非同次型線狀移動可能函數方程式 =
就イテ (II)

北 川 敏 男 (阪大)

3. 函數方程式 (1) = 於イテ、次ノ條件が充サレテキル

場合が(II)ノ対象ヲナス。

假定I. $g(x)$ ハ任意ノ有限區間ニ L -integrable
ナリ、且ツ Bochnerノ所謂 *gesamt stufe* $G(-\alpha^{(1)},$
 $\beta^{(1)})$ ニ属スル。

即チ

$$(14.1) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} = \beta^{(1)}$$

$$(14.2) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log |g(x)|}{-x} = -\alpha^{(1)}$$

$$(\alpha^{(1)} \leq 0 \leq \beta^{(1)} \text{ トスル})$$

假定II. *Linear translatable operation* ノ母函
數 $G(\lambda)$ ニ關スル條件トシテ

$$\alpha \leq R(\lambda) \leq \beta$$

ナル λ -plane 上ノ *strip*ニハ、零點ヲ有シナイ *poly-*
nome $P(\lambda)$ ガアツテ、コレニ關シテ

$$(15.1) \quad \int_0^\infty \left| \frac{(\beta + i\nu)^\pi}{P(\beta + i\nu) G(\beta + i\nu)} \right|^i d\nu < \infty \quad (i=1,2)$$

$$(15.2) \quad \int_{-\infty}^0 \left| \frac{(\alpha + i\nu)^\pi}{P(\alpha + i\nu) G(\alpha + i\nu)} \right|^i d\nu < \infty \quad (i=1,2)$$

トナルコトニスル。コトニ

$$(16) \quad \alpha < \alpha_1 \leq 0 \leq \beta_1 < \beta$$

ナラントスル。

λ -plane 上ノ四點 $\beta - iA, \beta + iA, -\alpha + iA$ 並ビニ
 $-\alpha - iA$ ヲバ、*counter-clockwise*ニ通過スル *Contour*

ヲ考ヘル — 以下デハ、 α, β ヲ *fixed* = $\vee A$ ヲ適當ニカ
 ヘルノデハ — コレヲ $\mathbb{C}_A$ デ表ハス。尚、上記四点間ノ $\mathbb{C}_A$ /
 部分ヲ夫々 $\mathbb{C}_A^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$) デ表ハス。 $\mathbb{C}_A^{(1)}, \mathbb{C}_A^{(3)}$ ハ虚軸
 = 平行ナ *segments* = ナツテ成ルヲスル。

茲ニ次ノ函数ヲ導入スル：

$$(17) \quad K_r(x-t, A) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{(r+iv)(x-t)}}{P(r+iv)Q(r+iv)} dV$$

$$(18) \quad H_{-\alpha}^{\beta}(x-t, A) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_A} \frac{e^{\lambda(x-t)}}{P(\lambda)Q(\lambda)} d\lambda$$

更ニ、擴張サレタ *Schmidt* ノ函数ヲ次ノ如ク定義スル：

$$(19) \quad \widetilde{N}_A(x, f: P) \equiv \int_0^{\infty} g(t) K_{\beta}(x-t, A) dt \\ + \int_{-\infty}^0 g(t) K_{\alpha}(x-t, A) dt$$

コニ、コレ等ノ積分ノ存在ハ、假定 I 並ビニ

$$(20.1) \quad |K_{\beta}(x-t, A)| \leq M e^{\beta(x-t)}$$

$$(20.2) \quad |K_{\alpha}(x-t, A)| \leq N e^{-\alpha(x-t)}$$

ナル *estimation* = ヨリ明カデアイル。但シ、 M, N ハ A ノ
 $x-t$ ニ無關係ナ常数デアイル。

茲デ注意スベキコトハ、 $\widetilde{N}_A(x, f: P)$ ハ前回ニ論ジタ
 $N_r(x, x_0; f: P)$ ノ *degenerate form* デアルトイフコト
 デアル。ソノ意味ハ、

$$(21) \quad \begin{cases} 1^{\circ} & P_r(\lambda) \equiv P(\lambda) \quad (r=0, 1, 2, 3, \dots) \\ 2^{\circ} & \mathbb{C}_r \equiv \mathbb{C}_A \\ 3^{\circ} & x_0 = 0, \alpha = -\infty, \text{ 且ツ } \beta = \infty \end{cases}$$

4° λ = 関スル積分 = 於イテ、 $\mathbb{C}_A^{(1)}, \mathbb{C}_A^{(3)}$ = correspond
 シタモノノミヲ考慮 = λ ヲ、 $\mathbb{C}_A^{(2)}, \mathbb{C}_A^{(4)}$ = correspond
 スルモノハ omit スル。

ナルヤウ = トルトキ、 $N_r(x, x_0; f: P_r)$ ハ取テ $\widetilde{N}_A(x, f: P)$
 トナルカラデアアル。茲 = $a = -\infty, b = \infty$ ト、トルコトノ效
 果ノ一ツハ大ガツパ = 言ヘバ、§ 2. 第二種 (8.1) 並ビ = (8.2)
 ノ積分ヲ考慮スル要ナキマウ = スルトコロ = モアル。又 (20).
 3° = 於ケル積分路ノ Omit ヲ許シタルタメ = ハ次 = 述ベル如
 ク吾々ハ若干ノ假定ト補助定理ヲ要スル。

4. 補助定理 I. 前節ノ假定ノモト = 於イテハ

$$(21) \quad I_\Delta \left\{ \int_0^\infty g(t) K_\beta(x+\Delta-t, A) dt + \int_{-\infty}^0 g(t) K_\alpha(x+\Delta-t, A) dt \right\}^{(2)}$$

が存在セ

$$(22) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \right\} dt \\
 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)} d\nu \right\} dt$$

= 零シイ。

証明： 今暫ク次ノ如ク置ク：

$$(2) \quad \text{一般} = I_\xi \{ h(x+\xi, y_1, y_2, \dots) \}, \text{ナリ} =, I_x \{ h(x, y_1, y_2, \dots) \}$$

ナル省略記法ヲ用キルコトガアル、コト =

$$I_\xi \{ h(x+\xi, y_1, y_2, \dots) \} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\xi^k \{ h^{(k)}(x+\xi, y_1, y_2, \dots) \}$$

ナアルコトヲ言フマデモナイ。

$$(23) \quad \psi_A(x) = \int_0^{\infty} g(t) K_{\beta}(x-t, A) dt$$

$$(24) \quad \phi(x, t; A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)x} e^{-i\nu t}}{G(\beta+i\nu)P(\beta+i\nu)} d\nu.$$

然ルトキ容易ニ示シケル如ク、 x ニ関シテ $\psi_A(x)$ 並ニ $\phi(x, t; A)$ ハ少クモ n 回ハ、微分可能ナ、上式ヲ形式的ニ微分シタモノデ $\psi_A^{(k)}(x)$, $\phi_x^{(k)}(x, t; A)$ ハ與ヘラレル。

($k = x$ ニ關スル微分係数) ($0 \leq k \leq n$)、即チ

$$(25) \quad \psi_A^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{(\beta+i\nu)^k e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \right\} dt$$

$$(26) \quad \phi_x^{(k)}(x, t; A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{(\beta+i\nu)^k e^{(\beta+i\nu)x - i\nu t}}{G(\beta+i\nu)P(\beta+i\nu)} d\nu$$

更ニ

$$(27) \quad |\psi_A^{(k)}(x)|, |\phi_x^{(k)}(x, t; A)| < K e^{\beta x} \text{ (for } x \geq 0 \text{)}$$

サテ、 Γ 、*linear translatability*ニ依ツテ有限區間ノ積分ト Operation Γ ノ順序ヲ交換シテヨイカラ

$$(28) \quad \begin{aligned} \Gamma_x(\phi(x, t; A)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)x} e^{-i\nu t}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \\ &= \frac{e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{-i\nu t}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \end{aligned}$$

依ツテ積分

$$(29) \quad \int_0^{\infty} g(t) e^{-\beta t} \Gamma_x(\phi(x, t; A)) dt$$

ハ存在シテ、ソレハ

$$(30) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \right\} dt$$

= 等しい。任意の有限区間 $(0, m)$ で

$$(31) \quad \int_0^m g(t) e^{-\beta t} \Gamma_x(\phi_\beta(x, t; A)) dt = \Gamma_x \left(\int_0^m g(t) e^{-\beta t} \phi_\beta(x, t; A) dt \right)$$

トイフコトト,

$$\Gamma_x \left(\int_0^\infty g(t) e^{-\beta t} \phi_\beta(x, t, A) dt \right)$$

ノ存在トカラ、 $m \rightarrow \infty$ トシテ

$$(32) \quad \Gamma_x(\psi_A(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \right\} dt$$

全ク同様ニシテ

$$(33) \quad \Gamma_x \left(\int_{-\infty}^0 g(t) K_\alpha(x-t, A) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 g(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)} d\nu \right\} dt$$

ヲ得ルカラ、証明ハ完結スル。

定理I. 假定 I, II, ノモトニ於イテ

$$(34) \quad P(D_x) \Gamma_x \left\{ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) K_\beta(x-t, A) dt + \int_{-\infty}^0 g(t) K_\alpha(x-t, A) dt \right\} = g(x)$$

注意.

$$(35) \quad P(x) \equiv \sum_{\Delta=0}^n a_\Delta x^\Delta + \text{ルトキ}$$

$$(36) \quad P(D_x) g(x) = \sum_{\Delta=0}^n a_\Delta \frac{d^\Delta}{dx^\Delta} g(x)$$

ニ解スルコトニスル。

証明: コレニハ、Paley-Wiener: Fourier Trans-
forms Chapter VI. p. 88 (27.15) — (27.17)ニ於ケル論
法ヲ用キレバヨイ。

長クナルオラ委細ハ同書ニ譲ル。

補助定理 II. $f(x)$ モ亦假定 I, IIヲ充タシタトスル、
然ルトキ

$$(37) \quad \psi_A(x) = \int_0^\infty K_\beta(x-t, A) \Gamma f(t) dt + \int_{-\infty}^0 K_\alpha(x-t, A) \Gamma f(t) dt$$

トオクナラバ, $\psi_A(x)$ ハ少クモ $n+k$ 回ハ連続微分可能デア
ル。而シテ

$$(38) \quad \begin{aligned} \psi_A(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{P(\beta+i\nu)} d\nu \right\} dt \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(t) \left\{ \int_{-A}^A \frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{P(\alpha+i\nu)} d\nu \right\} dt \\ & - \sum_{p=1}^n \sum_{\nu=0}^{p-1} \Delta_{\frac{\nu}{h}}^p \left\{ f^{(p-\nu-1)} \right\} \left[K_\beta^{(\nu)}(x-t, A) - K_\alpha^{(\nu)}(x-t, A) \right] \\ & + \sum_{p=0}^n \Delta_{\frac{h}{h}}^p \left\{ \int_0^h f(t) \left(K_\beta^{(p)}(x-t, A) - K_\alpha^{(p)}(x-t, A) \right) dt \right\} \end{aligned}$$

証明: コレヲ証明スルニハ, (I)ニ述ベタ積分ノ変形
ト同ジ計算ヲ

$$(39) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty g^{(p)}(t+h) K_\beta(x-t, A) dt + \int_{-\infty}^0 g^{(p)}(t+h) K_\alpha(x-t, A) dt \\ & = \int_0^\infty g(t) \frac{\partial^p K_\beta(x+h-t, A)}{\partial x^p} dt + \int_{-\infty}^0 g(t) \frac{\partial^p K_\alpha(x+h-t, A)}{\partial x^p} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\nu=0}^{p-1} g^{(p-\nu-1)}(h) \left\{ K_{\beta}^{(\nu)}(x-t, A) - K_{\alpha}^{(\nu)}(x-t, A) \right\} \\
& + \int_0^h g(t) \left\{ K_{\beta}^{(p)}(x-t, A) - K_{\alpha}^{(p)}(x-t, A) \right\} dt
\end{aligned}$$

ヲ導イテオケバヨイ。

吾々ハ更ニ、次ノ假定ヲ設ケテ論歩ヲ進メル：

假定Ⅲ. 次ノ如キ正数ノ系列 $\{A_m\}$ が存在スル。

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. A_m \uparrow \infty \\ 2^\circ. \int_{R(\alpha)}^{R(\beta)} \left| \frac{(\mu \pm i A_m)^k e^{(\mu \pm i A_m)(x-t)}}{P(\mu \pm i A_m) Q(\mu \pm i A_m)} \right| |du| \rightarrow 0 \\ \quad (as \ m \rightarrow \infty) \quad \text{茲ニ、} k \leq n \text{ トスル。} \\ 3^\circ. \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^\nu H_{\alpha}^{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

が存在スル。

假定Ⅳ. Strip $-\alpha \leq R(\lambda) < -\alpha$, 及ビ、 $\beta_1 < R(\lambda) \leq \beta$
ニハ $G(\lambda)$ ノ零点ハ存在シナイ。

補助定理Ⅲ. 假定Ⅲノミトニ。

$$(41) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^\nu H_{\alpha}^{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^\nu} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial^\nu K_{\beta}(x-t, A_m)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^\nu K_{\alpha}(x-t, A_m)}{\partial x^\nu} \right\}$$

但シ $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

以上ノ準備ノ結果トシテ次ノ基本定理ニ到達スル：

定理Ⅱ. 假定Ⅰ, Ⅱ, Ⅲノミトニ於イテ、Gesamt Stufe
 $G(-\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ = 属スル函数方程式 (1) ノ任意ノ解ハ次ノ
如ク表ハサレル。

$$\begin{aligned}
(42) \quad f(x) = & P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) K_\beta(x-t, A_m) dt \right\} \\
& + P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 g(t) K_\alpha(x-t, A_m) dt \right\} \\
& + \sum_{p=1}^n \sum_{v=0}^{p-1} \Lambda_{\alpha}^v \left\{ f^{(p-v-1)}(k) \right\} P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^v H_\alpha^\beta(x-t, A_m)}{\partial x^v} \right\} \\
& - \sum_{p=0}^n \Lambda_{\alpha}^p \left\{ \int_0^k f(t) P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^v H_\alpha^\beta(x-t, A_m)}{\partial x^v} \right\} dt \right\}.
\end{aligned}$$

定理 III. 條件 I, II, III, IV, $\alpha, \beta = 1$ 於て

$$\begin{aligned}
(43) \quad F(x) = & P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) K_\beta(x-t, A_m) dt \right\} \\
& + P(D_x) \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^c g(t) K_\alpha(x-t, A_m) dt \right\} \\
& + \sum_{v=0}^n c_v \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^v H_\alpha^\beta(x-t, A_m)}{\partial x^v} \right\}
\end{aligned}$$

ニヨツテ定義サレタ任意ノ函数 $F(x)$ ハ、函数方程式 (1) ノ解デアリ、且ツ *Gesamtstufe* $G(-\alpha, \beta)$ デアル。