



Title	Quasi-metric spaceニ就イテ, III
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 97, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74363
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

438. Quasi-metric space = 就イテ. III

角 谷 静 夫 (阪大)

§. 次 $= \overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ 及 $\overline{AB}$ が何レモ有限デハアルカ有界デナイ場合ヲ考ヘル。

コノ場合ハ前ト同様 $= F_A$ ヲ定義シタノデハ $F_A =$ 属スル函数 $\varphi_A(x)$ / Norm

$$\|\varphi_A\| = \text{upper bound } |\varphi_A(x)| \\ x \in R_1 + R_2$$

ハ必ズレモ有限デハナイ。コノ時ハ次ノ如クスレバヨイ。

先ヅ $\widetilde{R}^*$ ヲ $R_1 + R_2$ デ define サレタ real non-negative one-valued + 函数ノ空間トシ、($\widetilde{R}^* =$ 属スル函数ノ Norm が有限デアルカドウカハ今ハ考慮 = 入レナイ) $\widetilde{R}^* =$ 於ケル函数ノ集合 F_A ヲ前号ノ場合ト全ク同様 $=$ define スル。

次 =、此ノ如ク定義サレタ F_A ノ、ウチカラ一ツノ集合 F_{A_0} ヲ取り出シ、 $F_{A_0} =$ 属スル函数 $\varphi_{A_0}^{\circ}(x)$ ヲ選テ、 F_{A_0} 及 $\varphi_{A_0}^{\circ}(x)$ ノ取りカタハ全ク自由デアルが選ンダ以上ハ之レヲ固定スルモノトスル。オクシテ定メラレタ $\varphi_{A_0}^{\circ}(x)$ ヲ用ヒテ $\overline{F_A}$ ヲ

$$\psi_A = \varphi_A - \varphi_{A_0}^{\circ}, \quad \varphi_A \in F_A$$

ナル函数 ψ_A 全体ノ集合トシテ define スル。スルト $\psi_A \in \overline{F_A} =$ 對シテハ

$$\|\psi_A\| = \|\varphi_A - \varphi_{A_0}^{\circ}\| = d(\varphi_A, \varphi_{A_0}^{\circ}) \leq \overline{AA_0}.$$

$= \overline{AA_0}$ 。ハ 假定ニヨリ有限デアルカラ $\overline{F_A}$ = 属スル函数ノ $Norm$ ハ常ニ有限デアル。

ニツノ函数ノ $distance$ ハ各々ノ函数カラ一定ノ函数 $\varphi_{A_0}^0(x)$ ヲ引イテモ変ラナイカラ、 $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$, ハ我々ノ問題ノ解ヲ與ヘルコトが容易ニワカル。(前号ノ議論ハ各々ノ φ_A , φ_B , , $Norm$ が有限ト云フコトハ用キテキナカッタ)

§. 次ニ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ノウチニ ∞ ニナルモノガ存在スル場合ヲ考ヘル。コノトキモ、若シ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, (随ッテ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 等) ガスベテ有限(有界デナクトモヨイ) ナラバ我々ノ問題ノ解クコトが出来ル。

コノ場合ヲ解クタメニハ前ノ § デマツタ如ク $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$ 等ヲ定義シテ、コレ等ノ $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$ 等ノウチデ $Norm$ ノ有限ノ函数全体カラナル部分集合ヲ $\overline{\overline{F_A}}$, $\overline{\overline{F_B}}$ 等トオケバヨイ。

$\overline{\overline{F_A}}$, $\overline{\overline{F_B}}$ 等ガ我々ノ問題ノ $solution$ デアルコトヲ示スタメニ先ヅコレ等ガ空集合デナイコトヲ示サユ。

前号デ示シタコトニヨリ F_{A_0} = 属スル函数 $\varphi_{A_0}^0$ ガ與ヘラレレバ、コレニ對シテ F_A = 属スル函数 φ_A^0 が存在シテ

$$d(\varphi_A^0, \varphi_{A_0}^0) \leq \overrightarrow{AA_0} < \infty$$

トナルカラ ($\varphi_{A_0}^0, \varphi_A^0$, $Norm$ が有限デアルカドウカハ今ハ問題トシナイ)

$$\psi_A^0 = \varphi_A^0 - \varphi_{A_0}^0$$

トオケバ $\psi_A^0 \in \overline{F_A}$ = テ

$$\|\psi_A^0\| = d(\varphi_A^0, \varphi_{A_0}^0) \leq \overline{AA_0} < \infty$$

デアレカラ $\psi_A^\circ \in \overline{F_A}$ トナル。即チ $\overline{F_A}$ ハ空集合デナイ。

次ニ

$$I, \quad \overline{\overline{F_A} \overline{F_B}} \leq \overline{AB}$$

$$I_2, \quad \overline{\overline{F_A} \overline{F_B}} \geq \overline{AB}$$

$$II, \quad \overrightarrow{\overline{F_A} \overline{F_B}} \leq \overrightarrow{AB}$$

$$II_2, \quad \overrightarrow{\overline{F_A} \overline{F_B}} \geq \overrightarrow{AB}$$

$$III, \quad \underline{\overline{F_A} \overline{F_B}} \leq \underline{AB}$$

$$III_2, \quad \underline{\overline{F_A} \overline{F_B}} \geq \underline{AB}$$

ナルコトヲ証明ショウ。

$\overline{F_A}, \overline{F_B}$ 等ニ属スル函数ノ間ノ *distance* ト F_A, F_B 等ニ属スルコレニ相當スル函数ノ間ノ *distance* トハ相等シク、且ツ $\overline{F_A}, \overline{F_B}$ 等ハ $\overline{F_A}, \overline{F_B}$ 等ノ *subset* デアレカラ I, III_2 ハ $\overline{\overline{F_A} \overline{F_B}}, \underline{\overline{F_A} \overline{F_B}}$ 等ノ定義ヨリ明カデアレ。

$II,$ が成立スルコトハ、任意ノ $\varphi_B \in \overline{F_B}$ = 對シテ $\varphi_A^\circ \in \overline{F_A}$ ヲ

$$d(\varphi_A^\circ, \varphi_B) \leq \overrightarrow{AB}$$

ナル如ク定メルコトが出来ルコトヨリ明カデアレ。何者、コレト全く同様ノコトヲ $\overline{F_A}, \overline{F_B}$ = ツイテ考へれば任意ノ $\psi_B \in \overline{F_B} \subseteq \overline{F_B}$ = 對シテ $\psi_A^\circ \in \overline{F_A}$ が定マツテ

$$d(\psi_A^\circ, \psi_B) \leq \overrightarrow{AB}$$

トナル。

今 $\psi_B \in \overline{F_B}$ = テ $\|\psi_B\| < \infty$ デアレバ假定ヨリ $\overrightarrow{AB} < \infty$ デアレカラ

$$\|\psi_A^\circ\| \leq \|\psi_B\| + \overrightarrow{AB} < \infty$$

トナリ $\psi_A^\circ \in \overline{F_A}$ トナル。ヨツテ $\overrightarrow{\overline{F_A} \overline{F_B}} \leq \overrightarrow{AB}$ ヲ得。

I_2, II_2 が成立スルコトハ、 $F_A, F_B =$ 関スルコレヲト
同様ノ關係が成立スルコトガ R_1 又ハ R_2 ノ点 $A =$ 於イテ考
ヘルコトニヨリ知ラレタコトヲ考ヘレバ容易ニナル。何者
点 $A =$ 於イテ、 $Norm$ ノ有限ナ函数ノ取ル値ヲ變化サ
シテモ、函数ノ $Norm$ ハ ∞ トハナラナイカラデアル。

($I_2 =$ テ $\overline{AB} = \infty$ ナルトキハ $\overline{\overline{F_A F_B}} \geq n$ ナ任意ノ integer n
ニ對シテ成立スルコトヲ示セバヨイ)

次ニ III_1 が成立スルコトヲ示サウ。コレハ少シ面倒デ
アル。

前号ニテ考ヘタコトニヨツテ $\varphi_A \in F_A, \varphi_B \in F_B$ が與ヘラ
レレバ $\varphi_B^\circ \in F_A, \varphi_B^\circ \in F_B$ ナ

$$d(\varphi_A^\circ, \varphi_B^\circ) = \overline{AB}$$

ニテ且ツ

$$\varphi_A(x_0) \geq \varphi_B(x_0) \text{ ナルトコロニテハ}$$

$$\varphi_A(x_0) \geq \varphi_A^\circ(x_0) \geq \varphi_B^\circ(x_0) \geq \varphi_B(x_0),$$

$$\varphi_A(x_0) \leq \varphi_B(x_0) \text{ ナルトコロニテハ}$$

$$\varphi_A(x_0) \leq \varphi_A^\circ(x_0) \leq \varphi_B^\circ(x_0) \leq \varphi_B(x_0)$$

ナル如ク定メルコトが出来タ。コレハ $\overline{F_A}, \overline{F_B} =$ 於イテ考ヘレ
バ $\psi_A, \psi_B =$ 對シテモ全く同様デアルコトハ容易ニワカル。

依ツテ今 ψ_A, ψ_B トシテ夫々 $\overline{F_A}, \overline{F_B}$ ニ屬スル函数ヲトツテ
オケバ、コレ等ハ勿論夫々 $\overline{F_A}, \overline{F_B}$ ニ屬スルカラ $\psi_A^\circ \in \overline{F_A},$
 $\psi_B^\circ \in \overline{F_B}$ ナ

$$d(\psi_A^\circ, \psi_B^\circ) = \overline{AB}$$

$$\min(\psi_A(x_0), \psi_B(x_0)) \leq \psi_A^\circ(x_0), \psi_B^\circ(x_0)$$

$$\leq \text{Max}(\psi_A(x_0), \psi_B(x_0))$$

ヲ満足スル如ク定メルコトが出来ル。コレヨリ

$$\|\psi_A^0\|, \|\psi_B^0\| \leq \text{Max}(\|\psi_A\|, \|\psi_B\|) < \infty$$

トナツテ $\psi_A^0 \in \overline{F_A}$, $\psi_B^0 \in \overline{F_B}$ ヲ得ル。即チ $\psi_A^0 \in \overline{F_A}$, $\psi_B^0 \in \overline{F_B}$
 $= \tau$

$$d(\psi_A^0, \psi_B^0) = \underline{AB}$$

ナル函数 ψ_A^0, ψ_B^0 が存在スル。

依ツテ、 $\overline{\overline{F_A} \overline{F_B}} < \underline{AB}$ ヲ得。

§. 次 = $\overline{AB}$ ノミデナク $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ 等ノうちニモ ∞ トナルモノが存在スル場合ヲ考ヘル。($\underline{AB}$ ハイツモ有限!)

コノ場合ハ、我々ノ問題ハ必ズシモ解ケルトハ限テナイ。

次 = カ、ル不可能ナ場合ノ例ヲ掲ゲル。

今 $f(x, y)$ ヲ空間 $R \times R = \tau$ define サレタ real, non-negative, one-valued symmetric function
 $= \tau$ 、 R デ定義サレタ如何ナル real, non-negative one-valued function $g(x) = \text{對シテモ}$

$$f(x, y) \leq g(x) + g(y)$$

が成立シナイモノトセヨ。(カ、ル $f(x, y)$ が存在スルコトハ紙上談話會、本号、次ノ論文参照)

R ノ element $A, B = \text{對シテ}$

$$\overline{AB} = \overline{BA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \infty$$

$$\underline{AB} = \underline{BA} = f(A, B) (= f(B, A))$$

トオケ。コノ $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\underline{AB}$ ハ明カニ條件 1°-5°ヲ満足シテ
キルガ、此ノ如ク define サレタ *quasi-metric space*
ハ如何ナル *metric space* へ "einbetten" スルコト
ハ出来ナイ。

何トナレバ若シコノ "Einbettung" が可能デアツタト
スレバ、ソノ空間ヲ R^* トセヨ。 R^* = 於ケル閉集合 F_A ,
 F_B , ガアツテ

$$\overline{F_A F_B} = \overline{AB}, \quad \overrightarrow{F_A F_B} = \overrightarrow{AB}, \quad \underline{F_A F_B} = \underline{AB}$$

等ヲ満足サレテキル筈デアル。

今 R^* ノ一点 X_0 ヲ取レバ、コレヲ同時ニ閉集合 F_{X_0} デ
アルト考ヘルコトが出来ル。スルト。

$$\overline{F_{X_0} F_{X_0}} = \delta(F_{X_0}) = 0 \text{ デアルカラ}$$

$$\underline{F_{X_0} F_A} = \underline{F_A F_{X_0}} = \overrightarrow{F_A F_{X_0}}$$

トナル。コレヨリ

$$\underline{F_{X_0} F_A} + \underline{F_{X_0} F_B} = \overrightarrow{F_A F_{X_0}} + \underline{F_{X_0} F_B} \geq \underline{F_A F_B} = \underline{AB}$$

ヲ得ル。ヨツテ今

$$g(X) = F_{X_0} F_X$$

トオケバ任意ノ $A, B \in R$ ニ對シテ

$$\underline{AB} = f(A, B) \leq g(A) + g(B)$$

トナリコレハ $f(x, y) =$ 對スル初メノ假定ニ矛盾スル。ヨツ
テ、コノ *quasi-metric space* ハ如何ナル *metric space*
ニ "einbetten" デキナイ。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳円也
ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北区

大阪帝國大學
理學部數學教室

清水辰次郎

振替口座番號

大阪一七七四三番

前期會計決算ハ第84号ニ報告シテアリマス。