



Title	非同次型線状移動可能函数方程式ニツイテ（Ⅲ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 97, p. 12-22
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74365
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

440. 非同次型線状移動可能函数方程式 ニツイテ(Ⅲ)

北川 敏 男 (阪大)

1. (I)-(II) = 於イテ積分 $N(x, x_0; f: p)$ 又ハソノ変形ヲ利用スルコト=ヨリ, 函数方程式

$$(1) \quad \Gamma f(x) = g(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

ノ解ヲ論シタ。 (II) = 於イテハ、Bochnerノ所謂 *Gesamtstufe* ガ *finite* デアルマデナ $g(x)$ ヲ與ヘテ、同様ナ $f(x)$ ヲモトメルコトヲ考ヘタ。コノデモ、 $g(x)$ ヲ或ル種ノ函数空間ノ *element* ナルトキ、同シ函数空間=属スル $f(x)$ ヲ求メル問題ヲ考究スルノデアルガ、ソノ函数空間ハ函数ノ大サ=関スル制限ヲ規約サレタバカリデナク、 $\{e^{i\lambda x}\}$

$(-\infty < t < \infty)$ = 開スル或ル意味デノ *dissection*
 = ツイテ規約サレタ函数カラナル空間デアアル。

乃チ、概週期函数、*B-class*、並ビニ $\mathcal{F}_k$ -class 等
 ノ主題トシヌウ。コレヲノ特殊ノ函数空間デ (1)ヲ論ズル場
 合、同一ノ *principle* デ支配サレル部分が多いノデ、コレ
 等ヲ包括スルヌウ、成ルベク一般的ニ議論ヲス、メタイ、ソ
 ノタメニ、若干ノ概念ヲ導入スル。

2. 定義 1 實軸上ノ或ル集合 R ノ部分集合ノアル

system $S(R)$ = 属スル任意ノ集合 S = 對シテ、實軸上
 ノ集合 $\mathcal{M}_S$ ト、 $\mathcal{M}_S$ デ定義サレタ函数ノ或ル集合 $\mathcal{F}_S$ が
 一意ニ定マレルトスル。

$\mathcal{M}_{S_1} \cdot \mathcal{M}_{S_2} \neq \emptyset$ ナルトキ、 $S_1 \dot{+} S_2 \subset S(R)$ デアツ
 テ、 $\mathcal{F}_{S_1 \dot{+} S_2}$ ハ次ノ如キ $f(t)$ ノ全体カラナル。即チ
 $f(t) \in \mathcal{F}_{S_1 \dot{+} S_2}$ ナルタメニ必要且ツ充分ノ條件ハ、次ノ如
 キ $f_1(t)$ 並ニ $f_2(t)$ が存在スルコトデアアル。

$$\mathcal{M}_{S_1} \dot{+} \mathcal{M}_{S_2} = \mathcal{M}_{S_1 \dot{+} S_2} \text{ニシテ}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{(i)} & f_i(t) \in \mathcal{F}_{S_i} \quad (i=1, 2) \\ \text{(ii)} & f(t) = f_1(t) = f_2(t) \quad (t \in \mathcal{M}_{S_1} \cdot \mathcal{M}_{S_2}) \\ \text{(iii)} & f(t) = f_1(t) \quad (t \in \mathcal{M}_{S_1} - \mathcal{M}_{S_2}) \\ \text{(iv)} & f(t) = f_2(t) \quad (t \in \mathcal{M}_{S_2} - \mathcal{M}_{S_1}) \end{cases}$$

カナルトキ、 $\mathcal{F}_{S_1 \dot{+} S_2} = \mathcal{F}_{S_1} \dot{+} \mathcal{F}_{S_2}$ デ表ハシ、 $\mathcal{F}_{S_1}, \mathcal{F}_{S_2}$
 ノ和函数空間ト云フ。

定義 2 (單調ナル函数空間ノ集合) 今、定義 1 デ述
 ベタ $\mathcal{F}_S$ ハ任意ノ $S \in S(R)$ = 對シテ *Completeness* ヲ

除イテハ Banach, 意味デ, *normalised space* ノ條件ヲミタシ、ソコニ於ケル Norm ヲ $\|f(t)\|_S$ デ示ス。若シ、 $S_1 \supset S_2$ ナルトキニハ常ニ、 $S_1 = S_2 + S_3$ ナル如キ $S_3 \in \mathcal{S}(R)$ が存在シ從ツテ定義1ニヨリ $\mathcal{M}_{S_1} \supset \mathcal{M}_{S_2}$ 。而シテ

$$f(t) = f^*(t) \quad (t \in \mathcal{M}_{S_2} = \text{對シテ})$$

ナルトキニ常ニ

$$\|f(t)\|_S \geq \|f^*(t)\|_{S_2}$$

ナラバ $\{\mathcal{F}_S\} (S \in \mathcal{S}(R))$ ナル 單調ナル函數空間ノ集合デアルトイフ。

定義3 (均等ナル函數空間ノ集合) 定義1ニ於イテ $S \in \mathcal{S}(R) = \text{シテ}$ $T_\alpha S \subset R$ ナルトキニハ常ニ、
 $T_\alpha S \in \mathcal{S}(R)$ デアリ、且ツ $T_\alpha S = S$ トオクトキ

$$1^\circ \mathcal{M}_{S_\alpha} = T_\alpha \mathcal{M}_S$$

$$2^\circ f(t) \in \mathcal{F}_{S_\alpha} \iff f(t+\alpha) \in \mathcal{F}_S \quad (t \text{ が Variable})$$

が満足サレテキルトキ、 $\mathcal{S}(R)$ ヲ (*Translation* = 對シテ) 均等ナル (homogeneous) ナ函數空間 トイフ。(但シ $T_\alpha K$ トハ、 K ノ各 element $x = \text{對シテ}$ $x+\alpha$ ナル如キ elementノ全体)。

定義4 單調、均等ナル函數空間ノ集合 $\{\mathcal{F}_S\}$ = 於イテ

$$\|f(t)\|_{S_\alpha} = \|f(\sigma+t)\|_S$$

ナルトキ translatable + Norm トイフ。

定義 5 ($\{\mathcal{F}_S\}$ 内, Linear Aggregate $L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$).

単調, 均等ナル函数空間ノ集合 $\{\mathcal{F}_S\}$ = 於イテ、次ノ條件ヲ充ス函数 $l(x)$ ノ集合ヲ、 $\mathcal{O}_\lambda$ = 関スル; $(\mathcal{F}_S)$ 内ノ Linear Aggregate トイヒ、コレヲ $L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$ デ表ハス。

條件 1° $l(x)$ ハ x ヲ固定スルトキ, $\mathcal{O}_\lambda$ ヲ定義域トスル λ ノ函数 $e^{i\lambda x}$, Linear functional = ナツヲキル; コレヲ

$$l(x) = A_\lambda(e^{i\lambda x})$$

デ表ハス。

條件 2° $l_i(x) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$ ($i=1, 2$) ナラバ

$$l_1(x) + l_2(x) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$$

條件 3° $l(x) \in \mathcal{F}_S$ ($S \in \mathcal{S}(R)$ = 對シテ)

條件 4° $\mathcal{O}_\lambda$ = テ定義サレヌ函数 $G(\lambda)$ ノ集合 $\mathbb{K}_\lambda$ ガアツテ $l(x) = A_\lambda(e^{i\lambda x}) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$ ナルトキ帯 =

$$A_\lambda(G(\lambda)e^{i\lambda x}) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R$$

但シ $\mathbb{K}_\lambda = \emptyset$,

(i) $G(\lambda) = C$ (任意ノ常數) ($\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ ノトキ) ナル函数ガフクマレル。

(ii) 任意ノ實數 Δ = 對シテ $G(\lambda) = e^{i\lambda\Delta}$ ($\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$) ナル如キ函数ガフクレテキルトスル。⁽¹⁾

(1) 注意: コノコトカラ

$$l(x) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R \text{ ノトキ } l(x+\Delta) \in L_{\mathcal{O}_\lambda}^R \text{ トナル。}$$

定義 6 (函数空間ノ集合 $C_{\mathcal{B}_\lambda}^R[\mathcal{F}_S]$) 單調, 均等

ナル函数空間ノ集合 $\{\mathcal{F}_S\}$ = 属スル element = シテ
次ノ條件ヲ、或ル Linear Aggregate $L_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ = 関シテ
満足スル函数空間ノ集合ヲ $C_{\mathcal{B}_\lambda}^R[\mathcal{F}_S]$ デ表ハス。

條件 1° 適當 = 選ンダ $S \in \mathcal{S}(R)$ = 對シテ

$$f(t) \in \mathcal{F}_S$$

條件 2° 任意ノ正數 ε = 對シテ、常 =

$$\|f(t) - l(t)\|_S < \varepsilon$$

ナル如キ $l(t) \in L_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ が見出サレル。

3. 前節ノ説明トシテ familiar + 若干ノ例ヲ舉
ゲル。

例 1. Bohr ノ概週期函数族: $\mathcal{A}$

$$(1) \quad R = \bigcup_t [-\infty < t < \infty], \quad \mathcal{S}(R) = (R)^{(1)}$$

$$(2) \quad \|f(t)\|_R = \text{l. u. b. } |f(t)|_{-\infty < t < \infty}$$

トスレバ、單調, 均質等ハ trivially = 満足サレテキル。
更 =

$$(3) \quad \mathcal{B}_\lambda = \bigcup_\lambda [-\infty < \lambda < \infty]$$

(1) コノ意味ハ集合ノ system $\mathcal{S}(R)$ ハ R ノミカタナルコトヲ表ハス。

例 1, 2, 3 = 於イテハ、第二節 = 於ケル諸定義ハ、餘計デアル。
モット簡明 = スマセルコトハ明カデアル。例 4 = 於テ
サヘ、尚コノ感ガアラハス。Valiron ノ無限項ノ微分方程式
= 至ッテソノ必要(?) が明カ = ナルヤウ = 思ハレル。

$$(4) \quad L_{\mathcal{B}_\lambda}^R: \quad l(x) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i\lambda_k x} \quad (\lambda_k \in \mathcal{B}_\lambda)$$

= トレバ, $C_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ は Bohr の 概週期函数, 全体 = ナル。

例 2. $L^2(-\infty, \infty) =$ 於テハ, (1), (3) 7 例 1 ト同ジ = トリ, $L_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ トシテ

$$(5) \quad l(x) = \int_{-g}^g e^{i\alpha x} \Gamma(\alpha) d\alpha \quad (0 < g < \infty)$$

($\because \int_{-g}^g |\Gamma(\alpha)|^2 < \infty$ トスル) , 如キ全体 = トレバ

$$(6) \quad \|f(t)\|_R = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

ナル Norm, 意味 = 於テ $C_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ 7 形成スル。

例 3. Bochner, B-class = 對シテハ,

$$(7) \quad l(\omega) = \int_{-g}^g e^{i\alpha t} dV(\alpha) \quad (g \text{ ハ有限})$$

, 全体 7 $L_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ トスレバ, Norm 7 (2) = トツテ $C_{\mathcal{B}_\lambda}^R$ 7 形成スル。

例 4. 有限區間 = テ $L^p =$ 属スル函数: $a < \alpha < 0 < \beta < b$ トシ $\beta - \alpha = 2\pi$ トスル,

$$R = [a, b], \quad \mathcal{M}_x = (x + \alpha, x + \beta)$$

$\mathcal{F}_x = L^p(x + \alpha, x + \beta)$ トスル。然ルトキ

$$\sqrt[p]{\int_{x+\alpha}^{x+\beta} |f(t)|^p dt} = \|f\|_x$$

トオクトキ、單調、均質ナ、且ツ *translatable* ナ距離ヲ
モツタ函数空間ノ集合ヲナス。而シテ

$$\mathcal{L} = (0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots, \pm 2n\pi i, \dots)$$

トシ、

$$l(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2ik\pi x}$$

トオクコト = ヨリ、 $C_{\mathcal{L}, \lambda}^R$ ヲ形成スルコトガワカル。

4. 以下常ニ、函数空間ノ集合ニ関シテハ、單調、均
等、可遷的 = *normalise* サレテキルコト等ハ假定スル。
簡單ノタメニ、§5ヲ R ガ有限區間ノトキ、§6ヲ R ガ
 $(-\infty, \infty)$ ナル場合ニツキ、夫々以下ニ用キル *Lemmas* ヲ
アゲテオク、コレヲノ函数空間ノ集合ヲ $\{\mathcal{F}_\alpha^\beta\}, [\mathcal{F}]$ デ夫
々示ス。

5. コノ問題ニナルノハ次ノ如キ *linear trans-*
latable operation Λ_f デアル。

條件 I $\Lambda_x(t)(f(t)) = g(x) \in [\mathcal{F}_\alpha^\beta]$ ハ x ヲキメルトキ、
 f = 関シテハ *distributive* デアル、即チ

$$\Lambda_t(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 \Lambda_t(f_1(t)) + c_2 \Lambda_t(f_2(t))$$

條件 II $i\lambda \in \mathcal{L}_\lambda$ = 對シテ

$$\Lambda_x(e^{i\lambda t}) = Q(i\lambda) e^{i\lambda x}$$

而シテ $Q(i\lambda) \in \mathbb{K}_{\mathcal{L}_\lambda}$ ナリトスル。

條件 III

$$\|\Lambda_x(t)(f(t))\|_x \leq Q \|f(t)\|_x$$

コゝニ、正数 G ハ f 及 φ = 独立 = エラベル。

コゝニ §2 デ導入シタ *Linear Aggregates* = 関シテ
次ノ假定ヲオク。

條件IV $L_{\omega\lambda}^R$ = 属スル任意ノ *Linear Aggregate*
 $l_{\lambda}(e^{i\lambda t})$ = 関シテ

$$\bigwedge_x (l_{\lambda}(e^{i\lambda t})) = l_{\lambda}(\bigwedge_x (e^{i\lambda t}))$$

デアルトスル。

然ルトキ、次ノ定理ガ成立スル。

補助定理I 若シモ $x, x+\tau$ ガ共 = R = 属スル
ナラバ

$$\bigwedge_{x+\tau} (f(t)) = \bigwedge_x (f(\tau+t))$$

トナル。乃テ (以上ノ制限ノモトデ) *translatable* =
ナル。

6. 今、 $R = (-\infty, \infty)$, $S(R) = (R)$ トシ、 $\bigwedge$ ハ
 $f(t) \in [\mathcal{F}]$ ヲバ $g(x) = \bigwedge_x (f(t)) \in [\mathcal{F}]$ = ヲツスモノ
トシ、§5ノ條件I, II = 加フル =

條件III* $\| \bigwedge_x (f(t)) \| \leq G \| f(t) \|$

トスル。然ルトキ

補助定理II 任意ノ實數 x 及ビ τ = 於テ

$$\bigwedge_{x+\tau} (f(t)) = \bigwedge_x (f(\tau+t))$$

7. ⁽¹⁾ 以上ヲ準備トシ、函数方程式 (I) = 関スル *Operational Calculus* = ツイテ論ズル。 $g(x)$ ノ属スル函数

ヲ $\mathcal{F}$ トス。

1°. A の Definitions bereich ヲ $\mathcal{D}(A)$ トシ、 Af ハコトヲ、linear operation ナマリ、

2°. $f \in \mathcal{D}(A)$ ノトキ $=$ ハ、(從ツテ空間ノ均質性カラ $\mathbb{T}_\infty f \in \mathcal{D}(A)$ ナルガ)

$$A \mathbb{T}_\infty f = \mathbb{T}_\infty A f$$

ガ成立スルモノトスル。 $\mathcal{F}$ ヲヲタヘルトキ、カナル Linear translatable operation ノヲチ、Definitions bereich ガ $\mathcal{F}$ ト一致スルモノハ、タシカ $=$ Ring ヲツクル。コレヲ $\mathbf{R}$ デ表ハス。特ニ $\mathbf{R} =$ 属シ且ツ任意ニ $g \in \mathcal{F}$ ヲ與フルトキ

$$A f = g.$$

ナル如キ $f \in \mathcal{F}$ ガ一ツ、而シテ唯一ツ存在スル様ナ $A =$ 對シテハ今假リ $=$

$$g = B f$$

トオケバ、 B ハ

$$AB = BA = E$$

ノ性質ヲモツカラ、 $B = A^{-1}$ トオク、コレハ勿論 $\mathbf{R} =$ 属スル。

カナル A ノ全体ハ $\mathbf{R} =$ 於イテ所謂 Einheitsgruppe ヲ形成スル。尚定理 II = ヨリ $\mathbf{R}$ ハ Multiplikation = 關シテ abelisch デモアル。

(1) §7-8 デハ、Linear translatable operator ヲ $A, B, C,$ 等デ表シテキル。ざりしハ、大文字ノ代リ。

8. *Dissection* の方法が適用サレルヌメ、次ノ條件ヲ $\mathcal{F}$ = 加ヘル:

條件(D). $R = (-\infty, \infty)$ = テ任意ノ四數 $\alpha_2 < \alpha_1, \beta_1 < \beta_2$ ヲ與ヘルトキ

$$\begin{aligned} g(i\lambda) &= 0 & \lambda &\leq \alpha_2 \\ &= 0 & \lambda &\geq \beta_2 \\ &= 1 & \alpha_1 &\leq \lambda \leq \beta_1 \end{aligned}$$

ナル如キ *generating function* ヲモツタ *linear translatable operator* = シテ $\mathcal{R}$ = 属スル様ナモノガ必ズ存在スル。

條件(E). $A \in \mathcal{R}$ = シテ且ツスベテノ $f \in \mathcal{F}$ = 對シテ

$$Af = 0$$

ナルヌメハ A ノ *generating function* $G(i\lambda)$ ハ恒等的 = 零 = ナルコトが必要且ツ充分ナル。⁽¹⁾

9. §7 マデノ假定ト條件(D), (E) ノモトニ於イテ $A \in \mathcal{M}$ ナルヌメ = 必要且ツ充分ノ條件ハ $\frac{1}{G(i\lambda)}$ ヲバ母函数トスル *generating function* が $\mathcal{M}$ = 属スルコトデアルノハ勿論デアルが、實際役 = 立ちソウナモノトシテ次ノ定理ヲ擧ゲル。

(1) コノ條件(E) が充サレテキナイ場合デモ、コレ = *reduce* シテ。即チ、上ノ如キ A ノ全体ヲ $\mathcal{O}$ トオク、而シテ *Rest klassenringe* $\mathcal{R}/\mathcal{O}$ ヲ考ヘレバヨイ。

定理1. $\mathcal{F} = C_{\Omega, \lambda}^{\mathcal{R}}$ が complete なアリ. $A \in \mathcal{R} =$
 $\text{シテ } \infty > |G(i\lambda)| \geq a > 0 \text{ ナルトキ} = \text{ハ、 條件 (D), (E) ノモ}$
 $\text{トニ於テ、 } A \in \mathcal{M}$