



Title	みんこうすきーノ定理ノ一変形
Author(s)	森本, 清吾
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 98, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74367
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

442. みんなこうすきーノ定理ノ一変形

森 本 清 吾(物理學校)

Klimclime が Math. Ann. 111 S. 631-637 ナ次
ノ定理ヲ証明シテ居ル。

「 $\alpha x - y + \beta$ (α ハ無理數, β ハ實數, x, y ハ整數)
ニ於イテ

$$|\alpha(\alpha x - y + \beta)| < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{5}} \quad (x > 0) \text{----- (1)}$$

ナル如キ x, y ノ組ハ無數ニ存在スル。」

ツマリみんなこうすきーノ定理ニ $x > 0$ ナル條件ヲ加ヘテ
変形デアアル。 $x < 0$ ノ範圍ハ考ヘテ居ナイノデアアルカラ
 $\alpha x - y + \beta = 0$ ガコノ範圍デ格子点ヲ過ツテモヨイワケ
デ、ソノトキハ (1) ノ右辺ハ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ヨリ小サクハ出来ナイコト
ハふりうりつつ一ぱあるノ定理カラ明デアアルカラ、コノ結果
ハソノ意味デ最良ノ結果デアアル。

然シ (1) ノ右辺ハ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ニ近いノハ $\alpha x - y + \beta = 0$ ガ Y 軸
ノ左側デ格子点ヲ過ルカ又ハ格子点ノ非常ニ近クヲ過ル場合
デアラウコトハ想像サレル。ソレ故 Y 軸ノ左側ニ於ケル
 $|\alpha(\alpha x - y + \beta)|$ ニアル制限ヲ與ヘレバ (1) ノ右辺ハソレ
ニ應ジテモット小サクナルデアラウ。コノ意味ニ於テコノ問
題ヲ研究シテ見ヨウ。

著者ノ論文 Über die Größenordnung. u.s.w.
ノ I. Japanese Journal of Math. III. pp1-26
デ著者ハ

$$L: \alpha x - y + \beta = 0$$

、*Näherungspunkt* とルモノヲ定ム。ソノ分布状態
ニツイテ述ベタ。

ソノ中、最初ノ結果トシテ L ト Y 軸トニヨツテ分タレ
タ四ツノ部分ノ中ノ一ツノ中ニ二点、ソノ隣リニ一
点ヅツアリ且ツ面積 1 ノ平行四辺形ノ頂点トナルモノヲ
Näherungspunkt ノ組が無数ニアル (pp. 6.7 ヘソノ p_m, p_l'', p_n, q_n)
ト云フコトヲ特記シテオク。コノ四ツノ近似点ノ近似度ヲ比
較シテ見ヨウ。 L ヲ X 軸 $- Y$ 軸ヲ Y 軸ニ交換スルモノヲ面積
不変ノ *Affine* 変換ヲ行フストキ、カモノナ四点が A, B, C, D
ニ來ストシ、 A が第二象限 $= B, D$ が第一象限 $= C$ が第四象限
ニアツタトシ $ACDB$

ガコノ順ニ平行四辺形
ノ頂点トナツタスル。

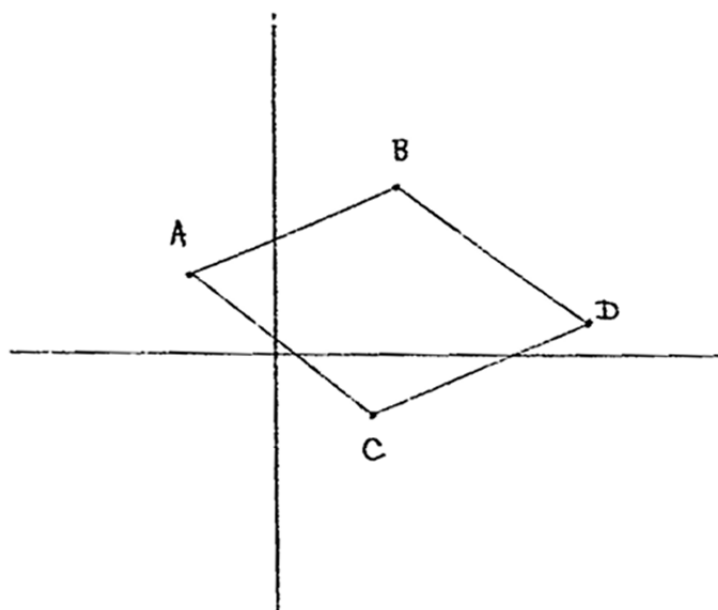
モノ方ニ依ツテ A ハ

$(-a, a)$ ト云フ座標

ヲモツモノニトルコ

ト出來ル。 B, C

ノ座標ヲ $(x, y), (u, v)$



トスルト D ノ座標ハ $(x+u+a, y-v-a)$ トナル。コレ
等ノ点ニ對度スル近似点ニツイテ $|x(\alpha x - y + \beta)|$ ノ値ハ
コレヲノ点ノ x 座標ト y 座標トノ積ニ等シイ。 A ガ L ヲ Y 軸
ノ左側ノ近似点ニ對應スル点トスレバ問題ハ a ヲ常数トシ平
行四辺形 $ABCD$ ノ面積ガ / トルトキ

$$\text{Min } (xy, uv, (x+u+a)(y-u-a))$$

1. 最大値ヲ求ムルト云フコト=歸スル。コノ Min ヲ R トスレバ $xy = \pm R$ ナル曲線ハ B, C, D ノ何レカヲ過ル。他ノ点ガコノ曲線上ニナイトキハ BD ヲソノ直線上ニズラシ又 AC ノ長サト AB ノ長サヲカヘ ($\square ABCD = 1$ ナルマウ) テ R ヲ次第ニ大キクシ、遂ニ B, C, D ガ皆コノ曲線上ニアルマウニ至リコトが出来ル。

故ニコノトキダケヲ考ヘレバヨイコトニナル。コノトキ R ノ値ヲ定トオケバ

$$xy = \pm R, uv = \pm R, (x+u+a)(y-u-a) = \pm R$$

$$(x+a)(v+a) + (y-a)(u+a) = 1$$

(平行四辺形ノ面積)

ナル式ヲ得ル。コノ條件ノ下ニ至ル最大値ヲ求ムレバヨイ。勿論文字ハすべて正數ヲ表ハシ、 a ハ常數ヲ表ハシテ居ル。

消去ノ中途ノ式ハ略ストシテ x, y, v ヲ消去シ得タ式ヲ $u = \psi$ イテ整理スルト

$$2a(3\pm + a^2 - 1)u^2 + (5\pm^2 + 10a^2\pm + a^4 - 1)u$$

$$+ 2a\pm(3\pm + a^2 + 1) = 0 \text{ ----- (A)}$$

トナル。コノ方程式ガ正根ヲモツタメニハ

$$3\pm + a^2 - 1 < 0 \text{ ----- (B)}$$

ヲハ

$$5\pm^2 + 10a^2\pm + a^4 - 1 < 0 \text{ ----- (C)}$$

ヲナケレバナリ。

$a = \frac{1}{2}$ トスルト $(B) \in (C)$ モ 各 $< \frac{1}{4}$ ヲ與ヘル。コノ
トキ Y 軸ノ右側ノ近似度ト左側ノ近似度が同一ノ制限
ヲ受ケ、ソレガ $\frac{1}{4}$ トナルノ ガアルカラ みるこゝろ オスキーノ定
理ニカヘツタヲケデアル。

故ニ $a > \frac{1}{2}$ ナルトキハ Y 軸ノ左側ト右側ヲ 入レカヘ
テ考ヘレバ ヨイコトニナルカラ $a < \frac{1}{2}$ ノ場合ガケ考ヘレバ
ヨイ。

$$(B) \text{ カラ } \quad \varphi < \frac{1-a^2}{3}$$

$$(C) \text{ カラ } \quad \varphi < \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$$

コノニツノ不等式ノ右辺ヲ比較スルト

$$\frac{1-a^2}{3} < \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$$

トオケベ

$$(a^2-1)(4a^2-1) > 0$$

ナル不等式ヲ得ルガ、コレハ正ニ考ヘタ a ノ範囲ガ成立スル。
故ニ 求ムル不等式ハ

$$\varphi < \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$$

デアル。原問題ニカヘルト

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x(\alpha x - \beta)| = P,$$

(x, y ハ 整数)

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x(\alpha x - \beta)| = N.$$

トオケベ

$$P \leq \sqrt{\frac{1+4N^2}{5}} - N \quad (\text{但し } N < \frac{1}{4} \text{ トキ}) \dots\dots\dots (D)$$

コノ右辺ハ $N=0$ ノ トキ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ トナリ、 $N>0$ ノ トキ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ヨリ小サシ、故ニコノ定理ハ *Klimcline* ノ 定理ヲ含ムヲケデアアル。

次ニモウ少シ詳しく考ヘテ見ヨウ。コノ結果ハ (C) カラ得タノデアアルカラ、コレガ等号ヲトルノハ (A) ノ中項ガ 0 トナルトキデアアル。ソノ トキ (B) ハ成立シナイノデアアルカラ初項ハ正トナリ、 A ハ虚根ヲモツコトニナル。故ニ (D) ノ等号ノ近クハ (A) ガ実根ヲモツト云フ條件カラ除去スルコトが出来ルデアラウ。サウスレバ (D) ハモット精密ニ出来ルヲケデアアル。(A) ノ判別式ヲ作ルト

$$(5x^2 + 10a^2x + a^4 - 1)^2 \geq 4a^2x \{ (3x + a^2)^2 - 1 \}$$

ユノ式ノ左辺ハ $x = \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$ ノ トキ 0、 x ガコレヨリ減ズレバ増シ、右辺ハ $x = \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$ ノ トキ正デ x ガコレヨリ減ズレバ減ジ $x = \frac{1-a^2}{3}$ ノ トキ 0 トナル。故ニ

$$\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2 > x_1 > \frac{1-a^2}{3}$$

ナルアル x 、デコノ式ガ等号ヲトル所ガアル。コノ x 、ガ求めラレ、バ上ノ結果ハ

$$x < x_1$$

ト改良サレルヲケデアアル。目下 x 、ノ代リニ何か簡單ノ

式^レ之^レニ近イ^ニノヲ求^メタイト工夫^シテ居ル所^{ナル}。

——七月十一日記——