



Title	行列変換ト其ノ應用
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 100, p. 7-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74378
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

453. 行列変換ト其ノ應用

福 原 満 洲 雄 (北大)

一階常微分方程式ノ特異点(I)ニ就テハ一通リ述ベタカ
ラ、次ニハ特異点(I')即チ

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} = y f(x, y, x^p y^{-1})$$

(p ハ正ノ整数, $f(x, y, z)$ ハ $(0, 0, 0)$ ヲ正則)

ヲ論ズル順序ニナルノデアルガ、コレハ

$$x^p y^{-1} = z$$

ト置クコトニヨリ

$$(2) \quad \begin{cases} x \frac{dy}{dx} = y f(x, y, z) \\ x \frac{dz}{dx} = z \{ \rho - f(x, y, z) \} \end{cases}$$

トナリ、此ノ形ノ方が(1)ヨリ極ニ易イカラ特異点(I)ノ結果ヲ聯立微分方程式ノ場合ニ擴張シ、然ル後特異点(I')ニ戻レコトニシヨウ、ソコデ一般ニ

$$(3) \quad x \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ニ於テ $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$ が漸近的ニ $x, y_1, \dots, y_n$ ノ累級数ニ展開サレル場合ヲ考ヘルコトニナルノデアルガ、ソノ前ニ線形微分方程式ヲ論ツテ置カウ。

$$(4) \quad \frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t) y_k \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ナル線形微分方程式ハ行列ヲ使ツテ

$$(5) \quad Y' = AY$$

ト書クコトが出来ル、今コレニ $Y = PZ$ ナル置換ヲ行ツテ得ラレル方程式ヲ

$$(6) \quad Z' = BZ$$

ト書ケバ A, B ノ間ノ關係ハ

$$(7) \quad B = P^{-1}AP - P^{-1}P'$$

トナル、コノ行列変換ニ關シテハ既ニ Perron ノ研究 (Über eine Matrix transformation, Math. Zeitschrift, 1930) ガアリ、ソコデ A が有界 ($a_{jk}(t)$ が皆有界トイフ意味) ナ

ラベ, P, P^{-1}, P' が皆有界デアルマウナ適當ナ $P =$ 依ッテ B ノ對角線ノ片側ヲ皆 0 トスルコトが出来ルコトが証明サレテ
キル、彼ハ此ノ結果ヲ解ノ安定問題ニ應用シテキルノデアル
ガ、此ノ行列変換ハソノ他ノ問題ニ應用シテモ有效デアル、
コノデハ $a_{jk}(t)$ ガ

$$(8) \quad a_{jk}(t) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{jk}^{(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ニ漸近的ニ展開サレル場合ニツイテ述ベヨウ、此ノ場
合ニハ $P = (p_{jk}(t))$ トシテ $a_{jk}(t)$ ト同じ所デ

$$(9) \quad p_{jk}(t) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_{jk}^{(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

$$(10) \quad p'_{jk}(t) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda p_{jk}^{(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ニ展開サレル $p_{jk}(t)$ カラ成ル行列ヲ取り、此ノ P ヲ
適當ニ選ブコトニヨリ行列 $B = (b_{jk}(t))$ ヲ成ルベク簡單ニ
スルトイフノが目的デアル、 $p_{jk}^{(\lambda)}$ カラ成ル行列式ガ 0 デナ
イトスレバ $b_{jk}(t)$ ニ亦

$$b_{jk}(t) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{jk}^{(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ニ展開サレルコトハ明カデアル。

先ヅ最初ハ展開式ガ何ヲ意味スルカラ考ヘニ入レナイデ、
唯形式的ノ計算ヲ成ルベク多クノ $b_{jk}^{(\lambda)}$ ヲ 0 トスルマウニ
 $p_{jk}^{(\lambda)}$ ヲキメル、此ノ計算ヲ見易クスルニハ豫メ常数ヲ係数
トスル変換ヲ行ッテ $(a_{jk}^{(0)})$ ナル行列ハ標準形ニナツテキル

モノトル, $(p_{jk}^{(0)})$ ハ単位行列 E トスルト都合がヨイ、行列 $A^0 = (a_{jk}^{(0)})$ が標準形デアルカラ

$$A^0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \overbrace{\boxed{A_1^0}}^{n_1} & & \\ \hline & \overbrace{\boxed{A_2^0}}^{n_2} & \\ \hline & & \overbrace{\boxed{A_m^0}}^{n_m} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ 0 \\ \\ 0 \end{array}$$

$$A_j^0 = \begin{pmatrix} \lambda_j & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

トナル、ソコデ行列 B 7

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \overbrace{\boxed{B_{11}}}^{n_1} & \overbrace{\boxed{B_{12}}}^{n_2} & \overbrace{\boxed{B_{1m}}}^{n_m} \\ \hline \overbrace{\boxed{B_{21}}}^{n_1} & \overbrace{\boxed{B_{22}}}^{n_2} & \overbrace{\boxed{B_{2m}}}^{n_m} \\ \hline \overbrace{\boxed{B_{m1}}}^{n_1} & \overbrace{\boxed{B_{m2}}}^{n_2} & \overbrace{\boxed{B_{mm}}}^{n_m} \\ \hline \end{array}$$

ナル形 = m^2 個ノ行列 = 分ケル、 $\lambda_j - \lambda_k$ が 0 又ハ正ノ整数
デナイ時及ビ $\lambda_j = \lambda_k$, $j \neq k$ ノトキ = ハ $B_{jk} = 0$ トス
ルコトが出来ル、又 $B_{jj} = A_j^0$ トスルコトが出来ル、残ル場

合ハ $\lambda_j - \lambda_k$ が正ノ整数 Δ = 等シイ場合デアアル、此ノ時 =
 ハ B_{jk} ヲ e^t ノ累級数 = (形式的 =) 展開シタトキ、 $1, e^t, \dots$
 $\dots, e^{(\Delta-1)t}, e^{(\Delta+1)t}, \dots$ ノ係数ヲ 0 トスルコトが出来ル、
 $e^{\Delta t}$ ノ係数がケハ一様 = 0 トナラナイ、故 =

$$B_{jk} = B_{jk}^{(\Delta)} e^{\Delta t} \quad (\lambda_j - \lambda_k = \Delta)$$

トナル、 $B_{jk}^{(\Delta)}$ ハ 常数カラ成ル行列デアアル、ニツノ入ノ差が整
 数トナルヤウナモノハ其ノ実部が番号ト共 = 大キクナルヤウ
 = 番号ヲツケタモノトスレバ $j > k$ デアル、ソノ時 $B_{jk}^{(\Delta)}$
 ノ最モ上ノ列 (又ハ最モ右ノ行) ダケヲ除イテ残リノ部分ヲ
 商 0 トスルコトが出来ル、コノヤウ = シテキメラレタ B ハ e^t
 ノ整多項式トナルカラ

$$(11) \quad b_{jk}(t) = \sum_{\Delta} b_{jk}^{(\Delta)} e^{\Delta t} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

= 依ツテ $b_{jk}(t)$ ヲ定義スルコトが出来ル、ソノトキ微分
 方程式 (6) ハ直チ = 求積法デアケル。

$a_{jk}(t)$ が例ヘバ半直線

$$(12) \quad t = t_0 + \sigma \tan \theta_0, \quad \sigma \leq \sigma_0. \quad (t = \sigma + i\tau)$$

ノ上デ連続デ漸近的 = (8) ナル形 = 展開サレルナラバ、 $p_{jk}(t)$
 トシテ半直線 (12) ノ上デ連続デ (9) ナル形 = 展開サレル函
 数ヲ取ルコトが出来ルト言ヘナケレバ、唯形式的 = $p_{jk}^{(\Delta)}$ ヲ
 キメルコトが出来ルトイフダケデハ面白クナイ、ソノヤウナ
 $p_{jk}(t)$ ノ存在ヲ証明スル = ハ次ノヤウ = スレバヨイ、(7) ヲ
 書き換ヘテ

$$(13) \quad P' = AP - PB$$

ヲ得ル、 $Q_{jk}(t)$ ハ興ヘラレタ函数、 $b_{jk}(t)$ ハ上ノヤウニシテ既ニキマツタ函数デアルカラ (13) ハ n^2 個ノ未知函数 $p_{jk}(t)$ = 関スル線形微分方程式デアル、其ノ係数ハ半直線 (12) ノ上デ連続デ、 e^t ノ累級数 = 漸近的 = 展開サレル、而モ (13) ヲ形式的ニ満足スル級数 (9) ノ存在ガハツテキル、サウイフ場合 = ハ (13) ガ (9) ナル形 = 漸近的 = 展開サレル解ヲ唯一ツ持ツ、故ニ B ヲ上ニ述ベタヤウニキメタ時 (7) ガ成立スルヤウナ $p_{jk}(t)$ ハ確カニ存在スル、若シ $Q_{jk}(t)$ ノ漸近展開ガ

$$(14) \quad \tau_1 + \sigma \tan \theta_1 \leq \tau \leq \tau_2 + \sigma \tan \theta_2 \quad \sigma \rightarrow -\infty$$

ノ時成立スルナラバ $p_{jk}(t)$ ノ漸近展開モソコデ成立スル。

若シ $Q_{jk}(t)$ ガ $2\pi i$ ヲ週期トスルナラバ $p_{jk}(t) \in 2\pi i$ ヲ週期トスル、從ツテ級数 (8) ガ収斂ナラバ級数 (9) モ収斂デアル。

コレカラ已ニヨク知ラレタ確定特異点ニ於ケル基本解ノ形ガ求マル。

結局 (4) ヲ形式的ニ満足スル級数

$$(15) \quad y_j \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_j^{(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ガ存在スルトイフ 特別ナ場合 = 漸近的 = (15) ナル形 = 展開サレル (4) ノ解ノ存在ヲ論ジテ置ケバ行列変換 (17) = 関スル形式的ノ結果ト組合セルコトニヨツテ、行列変換 (17) ガ片ヅイタコトナリ、ソノ結果簡單ナ形ヲ持ツ微分方程式 (6) ヲ積分スルコトニヨリ 一般ノ場合 = 於ケル (4) ノ基本解ノ形ガ求マ

ルノデアル、漸近的 $= (15)$ ノ形 $=$ 展開サレル (4) ノ解ノ存在ヲ論ズル $=$ ハ今迄屢々述ベテ來タ論法ヲ使ヘバヨイ、而モ此ノ場合 $=$ ハ計算ハ頗ル簡單デアル。