



Title	単位円内デ準調デアル函数ニ付テノー注意
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 101, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74379
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

454. 単位円内デ準調デアル函数ニ付テノ 一注意

河田龍夫 (= 高橋 龍夫) (東北大)

1. $u(p, \theta)$ ヲ単位円 $|pe^{i\theta}| < 1$ ノ内部デ連続且ツ準調和トスル。ソシア

$$(1,1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta)|^p d\theta \leq A \quad (0 \leq p < 1)$$

トスル。茲ニ $p > 1$ デアル。 A ハ p = 無関係ナ常数デアル。
以下 A ハ p = 無関係ナ常数トシソノ値ハ場所ニヨツテ同ジデアル必要ハナイトスル。準調和函数ノ斯様ナ *class* = 属シテハ、丁度解析函数ノ場合ニ於ケルヤウニ、 $p \rightarrow 1$ = 近ヅケタトキ、 $u(p, \theta)$ ガーツノ境界函数 (*boundary function*) = 近ヅクカドウカ、又如何ナル意味ヲ近ヅクカト云フコトハ重要ナ問題デアル。解析函数ニ對スル *F. Riesz* ノ定理ニ對應スルモノトシテ次ノ定理が知ラレテキル。

$p > 1$ = シテ $(1,1)$ が満足サレテキルテラバーツノ函数 $u(\theta)$ が存在シテ

$$(1,2) \quad \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta) - u(\theta)|^q d\theta = 0$$

デアル。茲ニ $0 < q < p$ 。

コノ定理ハ *J. E. Littlewood* (*Journal London Math. Soc.*, vol. 2, 1927) = ヨツテ証明セラレタモノデアルが茲ニ注意スベキハ $0 < q < p$ ナル附加條件デアル。

$1 \leq p > 0$ デハ一般ニ真デナイカラ *F. Riesz* ノ定理ノ擴張
 デナイコトハ勿論デアルガ $p > 1$ ノ場合デモ、コノ附加條件
 ノタメニ擴張ニナツテキナイ。併シコノ定理ニ於ケル假定ダ
 ケデ $q = p$ デモ成立スルカ否カハ不明デアル。コノ論文ノ
 目的ハ更ニモウ一ツノ條件ヲ加ヘテ $q = p$ デ (1, 2) ラ結論ス
 ルコトニアル。即チ

定理 1. $p > 1$ デ $u(p, \theta)$ ガ $|pe^{i\theta}| < 1$ ナル單位円ノ
 内部デ連続且ツ準調和トシ、更ニ負ニナラナイトスル。若シ
 (1, 1) ガ満足サレテキルナラバ一ツノ境界函数 $u(\theta)$ ガ存在
 シテ

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta) - u(\theta)|^p d\theta = 0$$

コノ定理ノ証明ノタメニ次ノ定理ヲ使フ、之レハ *M. Riesz*
 ニ負フモノデアル。

$f(x, y)$ ガ y = 関シテ $c < y < d$ デ p 乗ガ可積分 ($a < x < b$
 トスル) デ $x \rightarrow b$ (或ハ $x \rightarrow a$ デモヨイ) ノトキ一ツノ函
 数 $f(y)$ = 弱収斂スルトスル。茲ニ a, b ハ夫々 $-\infty, \infty$ ヲモ
 含メテ考ヘル。且ツ

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_c^d |f(x, y)|^p dy = \int_c^d |f(y)|^p dy$$

ナラバ $f(x, y)$ ハ $f(y)$ = 強収斂スル。

定理 1 ヲ証明シヌウ。今

$$u(p, \theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \phi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\phi - \theta) + \rho^2} d\phi$$

トオクト、前記 Littlewood の論文の中カラ次ノコトが判ツ
テキル。

(1,3) $u(p, \theta; r)$ ハ $r \rightarrow 1$ ノトキ單位円ヲ調和デアアル如
キ一ツノ函数 $u^*(p, \theta) \rightarrow$ 近ツク。

$$(1,4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u^*(p, \theta)|^p d\theta \leq A$$

$$(1,5) \quad u(p, \theta) \leq u^*(p, \theta)$$

吾々ノ場合ニ於イテハ $u(p, \theta)$ が負ニナラナイカラ (1,5) カ
ラ $u^*(p, \theta)$ モ負ニナラズ随ツテ実ハ (1,4) ニ於ケル絶對値ノ
符号ハ不要デアアル。

(1,4) ト調和函数ニ関スル F. Riesz ノ定理カラ

$$(1,6) \quad \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u^*(p, \theta) - u(\theta)|^p d\theta = 0$$

ナル如キ函数 $u(\theta)$ が存在スル。又上述シタ Littlewood,
定理カラ

$$(1,7) \quad \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta) - u(\theta)| d\theta = 0$$

コノ式ニ於ケル $u(\theta)$ ハ (1,6) ニ於ケルモノト同一ナルコト
ハ Littlewood, 原論文ニ徴シテ見レバ明カデアアル。 u^*
ノ定義カラ

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \{u^*(p, \theta)\}^p d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \phi) \frac{r^2 - p^2}{r^2 - 2rp \cos(\theta - \phi) + p^2} d\phi \right\}^p d\theta \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \phi) \frac{r^2 - p^2}{r^2 - 2rp \cos(\theta - \phi) + p^2} d\phi \right\}^p d\theta \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(r, \phi) \frac{r^2 - p^2}{r^2 - 2rp \cos(\theta - \phi) + p^2} d\phi \end{aligned}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(r, \phi) d\phi$$

茲 = 最初ノ不等号ノ部分 = Fatouノ定理ヲ用ヒテ。斯様ニシテ

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \{u^*(p, \theta)\}^p d\theta \leq \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(p, \theta) d\theta$$

が得ラレタ。之ヲ (1,5)ノ直接ノ結果デアル所ノ

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(p, \theta) d\theta \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \{u^*(p, \theta)\}^p d\theta,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(p, \theta) d\theta \leq \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \{u^*(p, \theta)\}^p d\theta$$

ト組合シテ

$$(1,8) \quad \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \{u^*(p, \theta)\}^p d\theta = \lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} u^p(p, \theta) d\theta$$

ヲ得ル。

(1,7)カラ $-\pi \leq x \leq \pi$ ナル任意ノ x = 對シテ

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^x u(p, \theta) d\theta = \int_{-\pi}^x u(\theta) d\theta$$

故ニ (1,1) ナル假定ニ注意スルニ $u(p, \theta)$ が $u(\theta) = p$ 次ノ弱收斂ヲスル。從ツテ前記ノ $M. Riesz$ ノ定理カラ (1,8)ヲ考ヘ入レテ $u(p, \theta)$ が $u(\theta) = p$ 次ノ強收斂ヲスル。之レヲ定理が得ラレタコトニナル。

2. Littlewoodノ定理ダケデハ $u(p, \theta)$ が $u(\theta) =$

1次ノ強收斂スルタメニハ (1,1) が $p > 1$ デ成立シテオラネ

ゞ駄目デア。吾々ノコノ事實ヲ少シク擴張ス。

補助定理 1. $v(p, \theta)$ が単位円ノ内部デ調和デ且ツ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |v(p, \theta)| \log^+ |v(p, \theta)| d\theta \leq A$$

ナラバーツノ可積分函数 $v(\theta)$ が存在シテ

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |v(p, \theta) - v(\theta)| d\theta = 0$$

$v(p, \theta)$ ノ共軛函数ヲ $\bar{v}(p, \theta)$ トスルト補助定理ノ假定ノ下 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{v}(p, \theta)| d\theta \leq A$ デアルトイフ事實ヲ知ツテオレバ *F. Riesz* ノ定理カラコノ補助定理ハ殆ンド自用デア。

Littlewood が $(1, 3), (1, 4), (1, 5)$ ヲ証明シタ如クニシテ次ノ補助定理ヲ証明スルコトが出来。

補助定理 2. $u(p, \theta)$ が単位円内デ連続ナ準調和ナ函数デ

$$(2, 1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta)| \log^+ |u(p, \theta)| d\theta \leq A$$

トス。 $u(p, \theta; r)$ ヲ §1ニ於ケル如ク定義スルト、次ノ事實が成立ス。

(2, 2) $u(p, \theta; r)$ ハ r ト共ニ單調ニ増加ス。

(2, 3) $u(p, \theta; r)$ ハ $r \rightarrow 1$ ノトキーツノ調和函数 $u^*(p, \theta)$ ニ近ツク。

$$(2, 4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u^*(p, \theta)| \log^+ |u^*(p, \theta)| d\theta \leq A$$

$$(2.5) \quad u(p, \theta) \leq u^*(p, \theta)$$

上ノニツノ補助定理が得ラレルト後ハ丁度 Littlewood
ガセツタノト同ジ=シテ次ノ定理ヲ証明スルコトが出来ル。
証明ハ簡単デアル。

定理2. $u(p, \theta)$ が単位円ヲ連続且ツ準調和トシ、且ツ
(2, 1) ヲ満足スルトスル。ソウスルトレーツノ函数 $u(\theta)$ が存
在シテ

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(p, \theta) - u(\theta)| d\theta = 0$$

デアル。