



Title	寫像函數ヲ作ルーツノ簡單ナ例題
Author(s)	黒田, 稻夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 101, p. 12-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74383
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

458. 寫像函數ヲ作ルーツノ簡單ナ例題

黒田 稻夫 (山形)

島海登山ヲ了ヘテ足休メト銷夏カタカタ次ノヨウナイタ
ガラヲシテミマシタ。初期學生ノ方々が函数論演習ノ際ノ一
題材トモナラバ幸堪デアリマス。

先ヅ w 平面上ノ蝸牛形 $\rho = a + b \cos \theta$, $a > 0$, $b > 0$ ヲ
考ヘマス

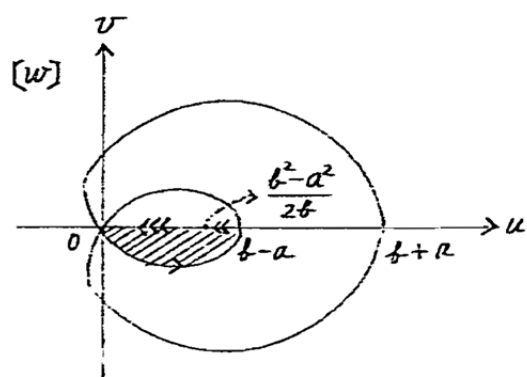
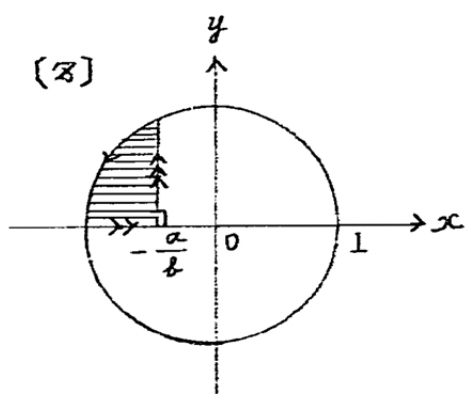
$$w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{b}{2} + a(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{b}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

ト書クコトが出来マス。ソレ故今

$$(i) \quad w = \frac{b}{2} + a\alpha + \frac{b}{2}\alpha^2 = f(\alpha)$$

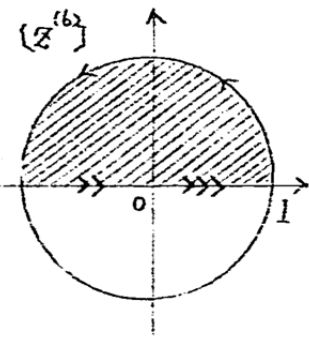
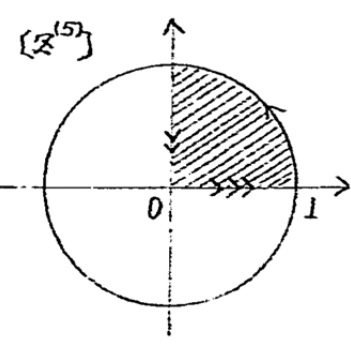
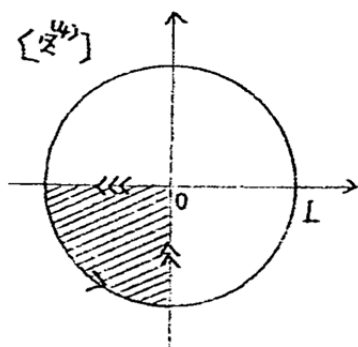
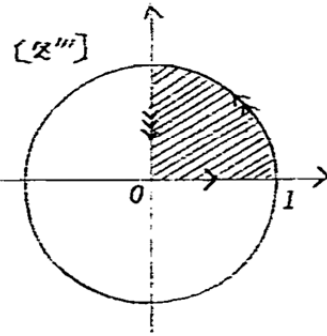
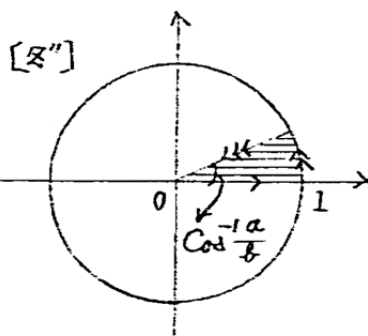
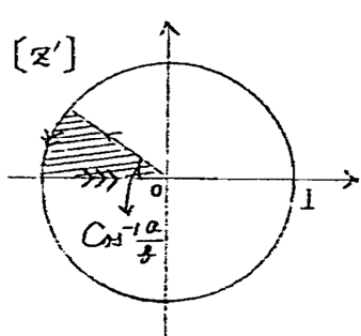
ヲ作ツテミマス。ト点々ガ α 平面上ノ單位円ヲ画クトキ此ノ
關係ニヨツテ点 w ハ w 平面上ノ上記ノ蝸牛形ヲ画キマス。

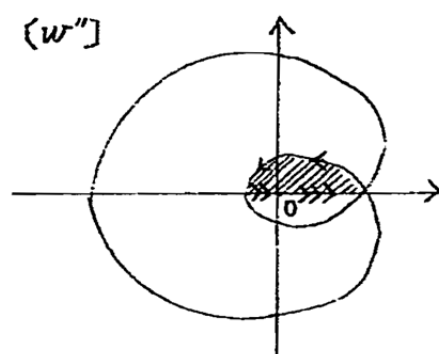
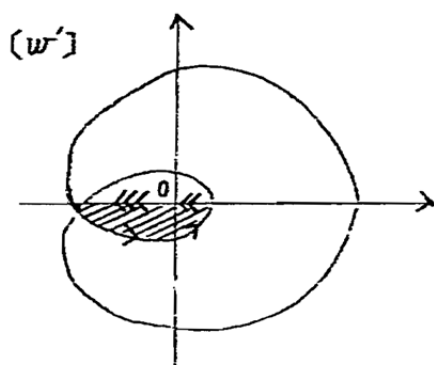
ソコデ (i) $a \geq 2b$, (ii) $b < a < 2b$, (iii) $a = b$ ナル
場合ニツイテ考ヘマス。ト $f'(\alpha) = a + b\alpha$ デイツテ單位円
 $|\alpha| = 1$ ノ内部デハ $f'(\alpha) \neq 0$ デアリマスカラ (i) ハ α 平面
ノ單位円ノ内部ヲ w 平面ノ蝸牛形ノ内部ヘ一對一ニ且ツ等
角ニ寫像シマス。(iv) $b > a$ ノ場合ハ一寸厄介デスカ解シ(i)
ニヨツテ次ノ寫像が得ラレルコトハスグニ分リマス。



ソコデz平面及w平面ノ指摘セラレタ面合ヲ次ノヨリニ
等角寫像ニヨツテ漸次變形シテ行キマス。

$$(2) \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{z - \left(-\frac{a}{b} + i \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\right)}{z + \left(\frac{a}{b} + i \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\right)}, & z'' &= e^{-i \cos^{-1}(-\frac{a}{b})} z', \\ z''' &= (z'')^2 \frac{\pi}{\cos^{-1} \frac{a}{b}}, & z^{(4)} &= \frac{z''' - i}{z''' + i}, & z^{(5)} &= -z^{(4)}, \\ z^{(6)} &= (z^{(5)})^2, & w' &= w - \frac{b^2 - a^2}{2b}, & w'' &= -w' \end{aligned} \right.$$





(1) 及び (2) カラ 式⁽⁶⁾ ト w'' トノ 関係ヲ 求メマス

$$w'' = -\frac{a^2}{2b} + \frac{a}{b} \frac{(a + i\sqrt{b^2 - a^2}) \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^{(6)}}{1 + \sqrt{\varepsilon}^{(6)}} \right)^{\frac{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}{\pi}} + a - i\sqrt{b^2 - a^2}}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^{(6)}}{1 + \sqrt{\varepsilon}^{(6)}} \right)^{\frac{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}{\pi}}}$$

$$- \frac{1}{2b} \left\{ \frac{(a + i\sqrt{b^2 - a^2}) \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^{(6)}}{1 + \sqrt{\varepsilon}^{(6)}} \right)^{\frac{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}{\pi}} + a - i\sqrt{b^2 - a^2}}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^{(6)}}{1 + \sqrt{\varepsilon}^{(6)}} \right)^{\frac{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}{\pi}}} \right\}^2$$

トナリマス。今 式⁽⁶⁾, w'' ノ 式ニ 改メテ 式, w ト書キ

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \right)^{\frac{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}{\pi}} = t \text{ ト置ク}$$

$$t^2 \left(w - \frac{b^2 - a^2}{2b} \right) + t \left(2w + \frac{b^2 - a^2}{b} \right) + w - \frac{b^2 - a^2}{2b} = 0$$

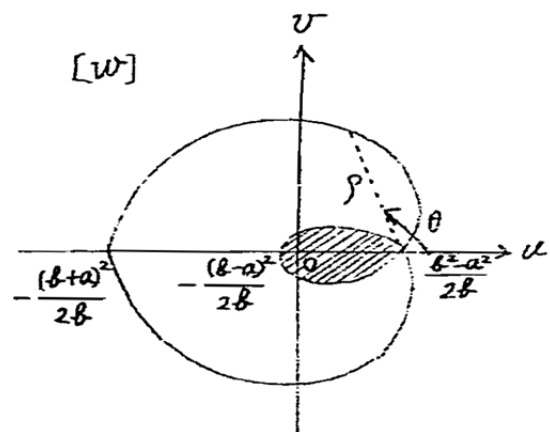
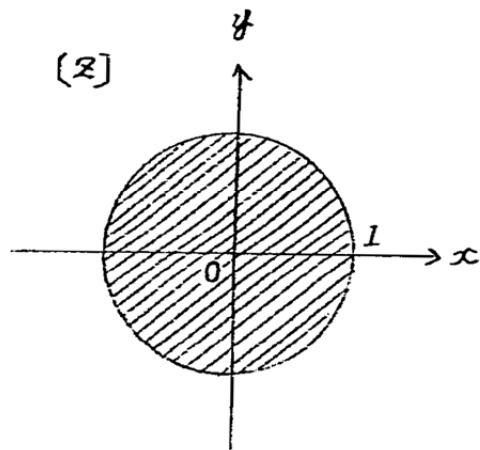
トナリコレヲ t = ツイテ 解キマス

$$t = \frac{\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2b}} - \sqrt{w}}{\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2b}} + \sqrt{w}}$$

が得ラレマス。従ツテ

$$(3) \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}} - \sqrt{w}}{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}} + \sqrt{w}} \right)^{\frac{\pi}{2\cos^{-1}\frac{a}{b}}}$$

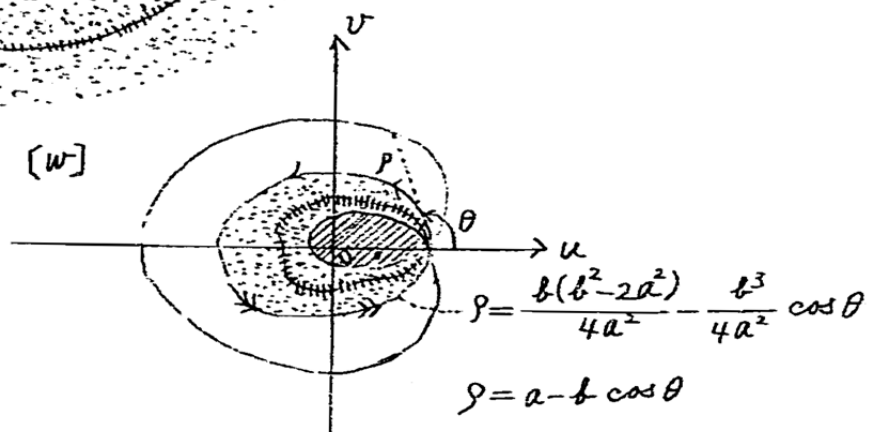
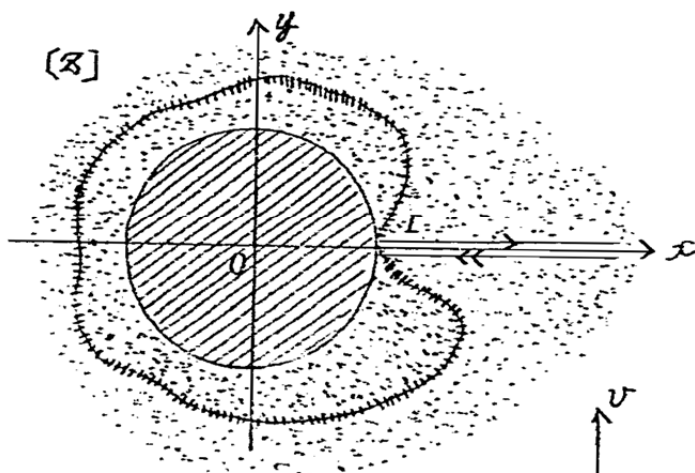
= ヨツテ 次ノ寫像が得ラれます。



$$\rho = a - b \cos \theta, \quad b > a > 0$$

尚 a, b ノ 値ヲ $2a \geq b > a > 0$ ノ 如ク制限シマス ト (1), (2), (3)

カラ 容易 = 次ノ寫像が得ラれます。



即ち實軸 = 沿ヒ $z=1$ ヨリ $z=\infty$ マデ切断セラレタ z 平面
ハ w 平面ノ蝸牛形 $\rho = a - b \cos \theta$ ノ内輪線ノ囲ム面分ヲ含
ミ其ノ外輪線ノ囲ム面分内ニアル面分即チ蝸牛形

$$\rho = \frac{b(b^2 - 2a^2)}{4a^2} - \frac{b^3}{4a^2} \cos \theta \quad \text{ノ一ツノ輪線ノ囲ム面分} = \text{寫}$$

像セラレマス。更ニ簡單ニ計算デスガ合ルヨリ w 平面ニ於
テ原点カラ蝸牛形 $\rho = a - b \cos \theta$ ノ任意ノ一点ニ至ル距離
ヲ d トシマス

$$\frac{(b-a)^2}{2b} \leq d \leq \frac{(b+a)^2}{2b}$$

デアリマス。ソレ故上記ノ切断セラレタ z 平面ノ面分 $|z| < 1$
ヲ含ム任意ノ單一連結ノ單葉ノ面分 ($z=1$ ハ其ノ周点)ハ
 w 平面ノ $|w| < \frac{(b-a)^2}{2b}$ ヲ含ム同種ノ面分ニ寫像セラレマス。
從ツテ又 $w = \frac{(b+a)^2}{2b} W$ ヲ考ヘマストコレト (3)カラ得ラ
レル關係

$$(4) \quad \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{1-a}{b+a}} - \sqrt{W}}{\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} + \sqrt{W}} \right)^{\frac{\pi}{2 \cos^{-1} \frac{a}{b}}}, \quad 2a \geq b > a > 0$$

ニヨツテ z 平面ノ上記ノ面分ハ w 平面ノ單位円内ノ同種ノ
面分ニ寫像セラレ而モコレハ常ニ其ノ内部ニ面分

$$(5) \quad |W| < \left(\frac{b-a}{b+a} \right)^2$$

ヲ含ムコトガ分リマス。

特 = $b = \sqrt{2}a$ ナラバ w 平面ノ蝸牛形 $\rho = \frac{b(b^2 - 2a^2)}{4a^2}$
 $-\frac{b^3}{4a^2} \cos \theta$ ハ用 $|w| = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ トナリ蝸牛形 $\rho = a - \sqrt{2}a \cos \theta$
 ノ外輪線ハコノ円 = 関シテ内輪線ノ鏡像トナリ從ツテ上記切
 断セラレタ各平面ノ代リ = 二葉面ヲ考ヘテ行クコト = ナリマ
 スカラ、コノコトカラ直チ = Carathéodory, Conformal
 representation P. 36 = 記載, Koebe, 定理カ得ラレ
 マス。即チ此ノ場合(4), (5)ハ夫々

$$\xi = \frac{(1+\sqrt{2})^2 w}{\{1+(1+\sqrt{2})^2 w\}^2}, \quad |w| < \frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}$$

トナリマス。