



Title	線形微分方程式ノ特異点, I
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 102, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74385
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

460. 線形微分方程式、特異点、I

福原 満洲 雄(北大)

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) y_k \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ナル微分方程式系ヲ行列ヲ使ツテ

$$(1) \quad \frac{dY}{dx} = A(x) Y$$

ト書テ、 $A(x)$ ハ $x \rightarrow \infty$ 、時漸近的 =

$$(2) \quad A(x) \sim \sum_{r=m}^{\infty} A^{(r)} x^{-\frac{r}{p}} \quad (A^{(m)} \neq 0)$$

ナル形 = 展開サレルモノトスル、 p ハ正ノ整数デアル。 $m > -p$
ノ場合 = ハ (1) ノ形式的解ヲ漸近展開トスル解ノ存在ヲ証明
スルノ = 直接 (1) = 存在定理ヲ應用シテモ巧ク行カナイカラ、
豫メ適當ノ置換ヲ行ツテ (1) ヲ都合ノヨイ形 = 変形シテ置テ
必要ガアル、ソノヌメ

$$(3) \quad P(x) \sim \sum_{r=-m'}^{\infty} P^{(r)} x^{-\frac{r}{p'}}$$

$$(4) \quad Y = P(x) Z$$

ト置キ Z 、方程式ヲ

$$(5) \quad \frac{dZ}{dx} = B(x) Z$$

ト書ケバ

$$(6) \quad B(x) = P^{-1}(x) A(x) P(x) - P^{-1}(x) P'(x)$$

トナル、 $B(x)$ ハ形式的ニ

$$(7) \quad B(x) \sim \sum_{r=-m''}^{\infty} B^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}} \quad (B^{(-m'')} \neq 0)$$

ナル形 = 展開サレル、 p', p'' ハ整数デアル。先カ形式的ノ計算デ $B(x)$ ノ展開式ヲ成ルベク簡單ニシテ見ル、 $m'' \leq -p'$ ナラバ $x = \infty$ ハ確定特異点トナルカラ、 $P(x)$ ヲドウ取ツテモ $m'' > -p'$ デアル場合ヲ考ヘル。

特有方程式

$$(8) \quad |A^{(-m)} - \lambda E| = 0$$

ノ根ヲ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ トスル。 $\lambda_j \neq \lambda_k$ ナラバ特ニ

$$p' = p, \quad m' = 0, \quad |P^{(0)}| \neq 0$$

デアルヌウナ $P(x)$ デ $b_{jk}(x) = 0$ 即チ $b_{jk}(x)$ ノ展開式ノ係数が皆 0 トナルヌウニ出來ル、但シ

$$B(x) = (b_{jk}(x))$$

從ツテ (5) ハ

$$\frac{dz_j}{dx} = \sum_{k=1}^n b_{jk}(x) z_k \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

デアル、故ニ (8) が異ナル根ヲ持ツバ (5) ハ二ツ又ハソレ以上ノ微分方程式系ニ分レルカラ、未知函数ノ数カレヨリ少イ場合ニ問題カ帰着サレル、若シ (8) ノ n 個ノ根が皆等シイナラバ

$$\bar{A}(x) = A(x) - \lambda_1 x^{\frac{m}{p}} E \sim \sum_{r=-m}^{\infty} \bar{A}^{(r)} x^{-\frac{r}{p}}$$

ト置キ

$$(9) \quad \frac{dY}{dx} = \bar{A}(x)Y$$

ヲ考ヘル、特有方程式

$$(10) \quad |\bar{A}^{(-m)} - \lambda E| = 0$$

ノ n 個ノ根ハ皆 0 デアアル、(6)ノ代リ＝

$$(11) \quad \bar{B}(x) = P^{-1}(x) \bar{A}(x) P(x) - P^{-1}(x) P'(x)$$

ヲ考ヘル、 $B(x)$ ト $\bar{B}(x)$ ノ間ノ関係ハ

$$(12) \quad B(x) = \bar{B}(x) + \lambda_1 x^{\frac{m}{p}} E$$

デ $P(x)$ = 無関係デアアル。 $\bar{B}(x)$ ノ展開式ヲ

$$(13) \quad \bar{B}(x) \sim \sum_{r=-\bar{m}}^{\infty} \bar{B}^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}} \quad (\bar{B}^{(-\bar{m})} \neq 0)$$

トスル、ソノトキ特有方程式

$$(14) \quad |\bar{B}^{(-\bar{m})} - \lambda E| = 0$$

ガ 0 デナイ根ヲ持ツマウ $=P(x)$ ヲ取ルコトが出来ル、コレ
ガ異ナル根ヲ持テバ未知函数ノ數ガ n ヨリ少ナイ場合＝
問題ガ帰着サレル、(14)ノ n 個ノ根ガ皆等シイナラバ

$$p' = p \quad \text{從ツテ} \quad p'' = p$$

トスルコトが出来ル、ソノトキ $m'' < m$ デナケレバナラナイ
コトガ証明サレル、故ニ今度ハ n ハ変ラナイガ m ハ少サ
クナル。コノ考ヘヲモット漸密ニシテ帰納法ヲ使ヘバ次ノ結
果ヲ得ル。

「 $P(x)$ ヲ適當ニ選ブコト＝ヨリ

$$B(x) = A(x) + x^{-1} \bar{B}(x)$$

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_j(x) = \sum_{r=-p''}^{p''-1} \lambda_j^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

$$\bar{B}(x) \sim \sum_{r=p''}^{\infty} \bar{B}^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}}$$

トスルコトが出来ル」

而モ $\lambda_j(x) \neq \lambda_k(x)$ ナレバ $\delta_{jk}(x) = 0$ トスルコトモ出来ル。故ニ例ヘバ

$$\lambda_1(x) = \cdots = \lambda_m(x) \neq \lambda_{m+1}(x), \cdots, \neq \lambda_n(x)$$

トスレバ $\mathcal{Z}_1, \cdots, \mathcal{Z}_m$ ダケガ一組ノ微分方程式ヲ満足シ

$$\mathcal{Z}_1 = e^{\lambda_1(x)} u_1, \cdots, \mathcal{Z}_m = e^{\lambda_m(x)} u_m$$

ト置ケバ $u_1, \cdots, u_m$ = 関スル方程式ハ $x = \infty$ 7 確定特異点トシテ持ッコトニナル、故ニ $\bar{B}(x)$ 7 出来ルダケ簡單ニスルニハ確定特異点ノ場合ノ結果ヲ使ヘバヨイ (行列変換トソノ應用参照)。

從ツテ $\bar{B}(x)$ ノ展開式ハ有限個ノ項シカ含マナイヤウニ出来ルカラ

$$\bar{B}(x) = \sum_{r=p''}^{\infty} \bar{B}^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}}$$

ト書イテモ差支ヘナイ。 $u_1, \cdots, u_m$ = 関スル方程式ハ

$x = \infty$ ヲ確定特異点トシテ持ッカラソノ形式的解ガ余ル、ソレカラモトノ変数 $y_1, \dots, y_n$ ニ戻ルコトニヨリ (1)ノ形式的解ガ求マル、コノヤウニシテ *Fabry*ノ定理ニ達スル。

ソコデ

$$P_N(x) = \sum_{r=-m'}^N p^{(r)} x^{-\frac{r}{p'}}$$

$$Y = P_N(x) Z$$

ト置キ Z ノ方程式ヲ

$$\frac{dZ}{dx} = B_N(x) Z$$

$B_N(x)$ ノ展開式ヲ

$$B_N(x) \sim \sum_{r=-m''}^{\infty} B_N^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}}$$

ト書ク、 R ニ對シテ N ヲ十分大キク取リサヘスレバ

$$B^{(r)} = B_N^{(r)} \quad (r = -m'', \dots, R)$$

トナル、故ニ上ニ述べタ定理ニ於テ $P(x)$ ノ展開式ハ有限個ノ項カラ成ルモノトスルコトガ出來ルカラ $P(x)$ ノ展開式ハ形式的ノモノデナク

$$P(x) = \sum_r p^{(r)} x^{-\frac{r}{p'}}$$

ト置イテ差支ヘナイコトニナル、コノヤウニ $\beta(x)$ ノ形ヲ簡單ニシテカラ (5)ニ解ノ存在定理ヲ應用スルト都合ガヨイ。尚 $x^{\frac{1}{p''}}$ ヲ x デ置換ヘルコトニヨリ $p''=1$ トスルコトガ出

来ルコトヲ注意スル、次回ニ於テ存在定理ノ應用ノ仕方ニツイテ述べヨウ。