



Title	Menchoffノ定理ニツイテ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 102, p. 9-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74388
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

463. Menchoffノ定理ニツイテ

井上正雄(阪大)

平面上ノ領域 D デ定義サレタ複素函数 $f(z)$ ヲ考ヘル。

D 内ノ一 z 点 z_0 = ヲイテ, z_0 ヲ端点トスル $Arg\ t(z) = \theta^{(1)}$
ナル線分ヲ $t(z)$ トシ, $t(z)$ 上ニ於ケル。次ノ三ツノ極限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right|,$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} Arg \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

ガソレゾレ存在スルトキ之レ等ヲ各々

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_t, \quad \left| \left. \frac{df}{dz} \right|_t \right|, \quad Arg \left. \frac{df}{dz} \right|_t \quad (or \left. \frac{df}{dz} \right|_\theta, \left| \left. \frac{df}{dz} \right|_\theta \right|, Arg \left. \frac{df}{dz} \right|_\theta)$$

ニテ表ハス。

條件 K', K'' :

$$z = \text{ヲイテ } Arg \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_1} = Arg \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_2} = Arg \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_3}$$

$$or \left| \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_1} \right| = \left| \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_2} \right| = \left| \left. \frac{df}{dz} \right|_{t_3} \right| < +\infty$$

(1) 一般ニ $Arg\ t(z)$ ハ實軸ヨリ上ノ方向ニ測ツタ $t(z)$ ノナス角ヲ示ス。

ヲ満足スル各ヲ端点トスル、イッレノニツモ一直線上ニ在ッ
ザル三線分 $t_1(z)$, $t_2(z)$, $t_3(z)$ が存在スルトキ、 $f(z)$ ハ各
ニツイテ條件 K' 又 K'' ヲ満足スルト云フ。

條件 K''' :

$$z = \text{ツイテ } \frac{df}{dz} \Big|_{t_1} = \frac{df}{dz} \Big|_{t_2} \quad (\text{有限}) \quad \text{ヲ満足スル各ヲ}$$

端点トスル。

一直線上ニ在ッザル二線分 $t_1(z)$, $t_2(z)$ が存在スルトキ
 $f(z)$ ハ各ニツイテ條件 K'' ヲ満足スルト云フ。

シカレトキ次ノ定理が成立スル。

定理. $f(z)$ が各ヲ全微分可能トシ且ツ

I. K' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ各ヲ正則⁽²⁾ (*monogène*) デ
アル。

II. K'' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ各ヲ正則カ又ハ正則函数ノ
共軛函数デアル。

III. K''' ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ各ヲ正則デアル。

Menchoff 自身ノ証明モアルが⁽³⁾、次ノ様ニシテ簡明ニ証明ス
ルコトモ出来ル。

一般ニ $f(z) = u + iv$ が各ヲ全微分可能トスレバ、各
ニツイテ $\frac{df}{dz} \Big|_0$ が存在シ且ツ

(2) I, II, III, スベテ *pointwise regular* ナルコトデアル。

(3) *Menchoff*: *Les conditions de monogénéité* (*Actuarités* 1936) p. 19—23.

$$\gamma(z, \theta) = \frac{df}{dz} \Big|_t = \frac{df}{dz} \Big|_\theta = \mathcal{Q}_1[f(z)] + \mathcal{Q}_2[f(z)] e^{-2i\theta}$$

トナル。

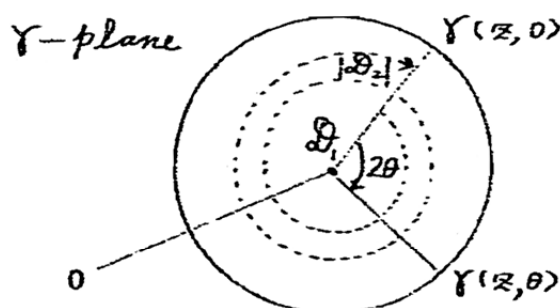
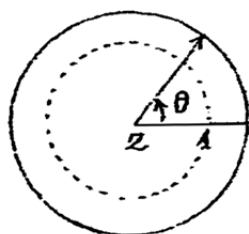
$$\text{但シ} \begin{cases} \mathcal{Q}_1[f(z)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ \mathcal{Q}_2[f(z)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{cases}$$

$$\text{即チ} \quad \gamma(z, \theta) - \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 e^{-2i\theta}$$

$$|\gamma(z, \theta) - \mathcal{Q}_1| = |\mathcal{Q}_2|$$

コノ式ハ各平面ニテ θ ガ各ヲ正ノ方向ニ一回轉スレバ γ 平面ニテ $\frac{df}{dz} \Big|_\theta$ ハ $\mathcal{Q}_1$ ヲ中心トシテ $|\mathcal{Q}_2|$ ヲ半径トスル円周 (此ノ円ヲ *Kasner's circle* ト云フ) ヲ負ノ方向ニ2度ノ速度ヲ以テ二回轉スルコトヲ示ス。(Fig. 1)

Fig. 1



I. 証明

$$\text{Arg}^+ t_i(z) = \theta_i \quad \text{トシ} \quad 0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi \quad \text{トス。}$$

假定ニヨリ

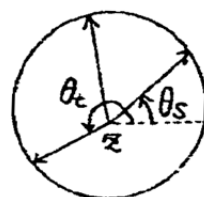
$$\text{Arg} \frac{df}{dz} \Big|_{\theta_1} = \text{Arg} \frac{df}{dz} \Big|_{\theta_2} = \text{Arg} \frac{df}{dz} \Big|_{\theta_3} = 0$$

若シ $|\mathcal{Q}_2| \neq 0$ トスレバ, 各ニ對シテハ $\frac{df}{dz} \Big|_\theta$ ハ γ 平面ニテ

ーツノ *Kasner*, *circle* ヲ画ヲカラ $\left. \frac{df}{dz} \right|_{\oplus}$ ノウチ *Arg* が θ トナルヤウナモノハ高々ニツシカ存在シナイ。(Fig. 2)
 故 $= \theta_i$ ($i=1,2,3$) ノウチ

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\theta_s} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{\theta_t}$$

Fig. 2



トナル、少クトモ一組ノ
 (θ_s, θ_t) が存在スル ($s \neq t$)。

今
$$\text{Arg} \left(\left. \frac{df}{dz} \right|_{\theta_i} - \mathcal{Q}_i \right) = \theta_i' \quad (1)$$

トスレバ (但シ $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_3$)
 ノ回轉 = 應ジテ測ル)

$$\theta_i \longleftrightarrow \theta_i' \text{ が連続的} =$$

對應シ且ツ *Kasner*, *circle*, 性質 = ヲリ

$$|\theta_i - \theta_j| = \frac{1}{2} |\theta_i' - \theta_j'| \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

シカラバ上ノ θ_s, θ_t = 對シテハ

$$|\theta_s' - \theta_t'| = 2\pi \quad \text{即チ} \quad |\theta_s - \theta_t| = \pi$$

デナケレバナラヌ。

シカル = $t_i(z)$ ハ イザレノニツモ一直線上 = ナイカラ

$|\theta_i - \theta_j| \neq \pi \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{故} = \text{勿論} \quad |\theta_s - \theta_t| \neq \pi$
 之レハ矛盾デアル。 $\therefore \mathcal{Q}_2 = 0 \quad (4)$

$$\text{即} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{\oplus} = \mathcal{Q}_1 [f(z)]$$

(4) $\mathcal{Q}_2 = 0$ ハコノ点デ *Cauchy-Riemann*, 關係式が成立スルコトヲ示ス。

右辺ハ $\textcircled{H}$ = 無関係且ツ有限デアル。

故ニ $f(z)$ ハズデ正則デアル。

II, 証明

$$(i) \quad |Q_1| = 0$$

コノトキハ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ が成立スルカラ

$f(z)$ ハズデ正則函数ノ共軛函数デアル。

$$(ii) \quad |Q_1| \neq 0$$

假定ヨリ $\left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta_1} = \left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta_2} = \left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta_3} = l < +\infty$

今若シ $|Q_2| \neq 0$ トスレバ $\left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta}$ ハ矢張り γ 平面デ *Kasner* ノ *circle* ヲ画クカラ $\left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta}$ ガ l トナルニシテ $\left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta}$ ハ高々ニツシカナイ。(Fig. 3)

故ニ

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta_s} = \left| \frac{df}{dz} \right|_{\theta_t}$$

ナル少クトモ一組ノ

(θ_s, θ_t) が存在スル。

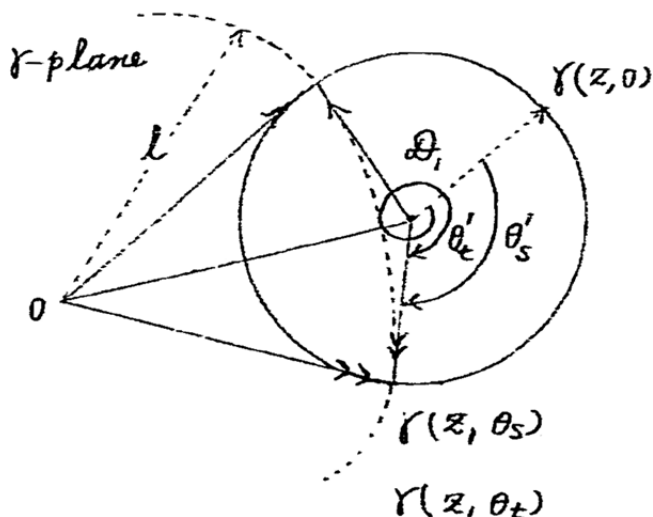
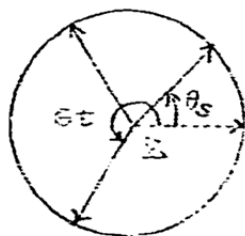
後ハ全く同様ニシテ矢張り矛盾トナル。

$$\therefore Q_2 = 0$$

即チ $f(z)$ ハズデ正則

デアル。

Fig. 3



III.

矢張り $|\mathcal{Q}_2| \neq 0$ と假定シヤウ。

假定ヨリ

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\theta_1} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{\theta_2}$$

デアルカラ

$$|\theta_1' - \theta_2'| = 2\pi$$

即ち $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ デナケレバ

ナラス。(Fig. 4)

シカル $t_1(z), t_2(z)$ ハ

一直線上ニナイカラ

$$|\theta_1 - \theta_2| \neq \pi$$

故ニ矛盾。 $\therefore \mathcal{Q}_2 = 0$

即ち $f(z)$ ハ z デ正則デアル。

コノ定理ハ何モ難シイト云フワケデハナイガ、唯コノ証明方法ニヨル方がコレ等諸條件ノ意味、換言スレバ各條件ノ所謂効キ方が判然トスルヤウニ思ハレル。

Menchoff ハ此ノ定理ヲ根幹トシテ次ノ定理ヲ証明シタ。⁽⁵⁾

定理 I.

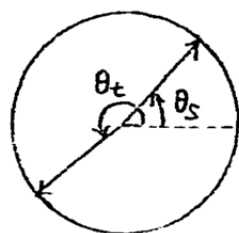
$f(z)$ ヲ D デ定義サレタ單葉ナ連続函数トスル。

(5) Menchoff, Sur les fonctions monogènes.

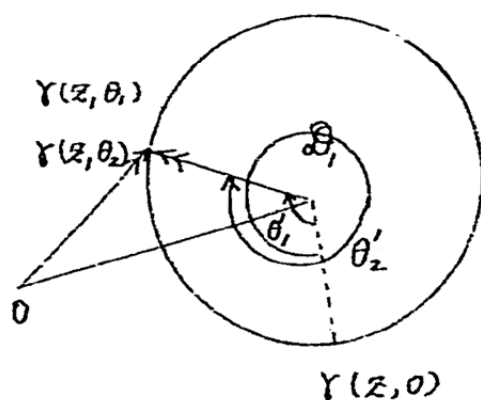
Bull. de la Soc. Math. de F. t. 59 (1931)

Menchoff, Actuarités. loc. cit.

Fig. 4



γ -plant



若シ $f(z)$ が D で可附番点集合ヲ除キ, 各点デ K' 或ハ K'' ヲ満足スルナラバ $f(z)$ ハ D で正則デアアル。

定理 2.

$f(z)$ ヲ D で定義サレタ單葉且ツ *directe*⁽⁶⁾ ナ連続函数トス。

若シ $f(z)$ が D で可附番点集合ヲ除キ, 各点デ K'' ヲ満足スルナラバ $f(z)$ ハ D で正則デアアル。

以上ノニ定理ニテ條件 K', K'' ノミツノ線分ヲニツノ線分デ置キ換ヘレバ最早定理が成立シナクナルコトハ正則ナラザル單葉ナ全微分可能函数ヲ考ヘ得ルコトヨリ明ラデアアル。例ヘバ $f(z) = x + y + iy$ 。

併シ一方, 此ノニ定理ニ依リ, *Laurentieff, fonction presque analytique* ノ定義ニテケル *condition métrique* ヲ上述ノ條件 K', K'', K''' デ各々置換スレバ $f(z)$ ハ D で正則函数トナルコトが解ル。即チ次ノ定理が成立スル。

定理

$f(z)$ ヲ D で定義サレタ連続函数トシ, 可附番点集合ヲ除キ, 各点各デ *localement univalente* ナ函数トスル。

シカルトキ若シ $f(z)$ が可附番点集合ヲ除キ, D ノ各デ K' ,

z 平面上ノ *Jordan* 曲線 J , $f(z) = \gamma$ ル *Bila* ヲ J' トシ
タトキ, コノニ曲線ノ *dense* が常ニ同ジデアルトキ $f(z)$ ハ
directe ナリト云フ。

K'' (コノトキノミ $f(x)$ ハ *directe* トス), 或ハ K''' ヲ満足スルナラバ $f(x)$ ハ D デ正則デアアル。

証明ハ尙單デアアル。

共通除外点集合ヲ e トスレバ, $D - e$ ノ各点ノ充分ハサ
イ近傍デ定理 1, 2 ヲ應用スレバ, $f(x)$ ガ $D - e$ ノ各点デ正
則ナルコトガワカル。

シカル = e ハ可附番点集合デアアルカラ, 結局 $f(x)$ ハ D
デ正則トナル。⁽¹⁷⁾

尚 *Menchoff* ハ $f(x)$ ノ單葉性ヲ除去レテ次ノ定理ヲ
証明シタ。

定理 3.

連続函数 $f(x)$ ガ D ノ始ンド到ル処デ K' ヲ満足シ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = L(x) \text{ が可附番点集合ヲ除キ,}$$

D ノ各点デ有限且ツ D デ積分可能ナラバ $f(x)$ ハ D デ正則デア
アル。

然シ此ノ定理ガ條件 K' ヲ K'' ($f(x)$ ハ *directe* トス),
或ハ K''' ガ置換シテモ大張り成立スルコトが同様ニシテ証明
サレル。

(17) $f(x)$ ガ D デ可附番点集合ヲ除キ正則ナラバ D デ正則トナ
ルコトハ *Pompeiu* ガ既ニ *Ann. de la Fac. Sc. de*
Toulouse (2), 11, (1905) デ証明シタ。