



Title	線形微分方程式ノ特異点, II
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 105, p. 2-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74399
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

474. 線形微分方程式ノ特異点, II

福原満洲雄(北大)

前回ニ述べた所ニヨリ最初カラ

$$(1) \quad \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^{-1} \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) y_k$$

($j=1, 2, \dots, n$)

ヲ考ヘテ差支ヘナイコトガ分ツタ。但シ $\lambda_j(x)$ ハ x ノ整多項式, $a_{jk}(x)$ ハ $x \rightarrow \infty$ ノ時

$$(2) \quad a_{jk}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{jk}^{(r)} x^{-r} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ニ展開サレル函数デアル。 (1) が

$$(3) \quad y_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_j^{(r)} x^{-r} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ノ形式的解ヲ持ツ場合ニツイテ述べヨウ。 $\log x$ が形式的解ノ中ニ表ハレテモ特別ニ変ツタコトモナイ。

$$(4) \quad y_j \sim e^{\Lambda(x)} x^P \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_j^{(r)} x^{-r} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ナル形ノ形式的解が存在スル場合ニハ

$$(5) \quad y_j = e^{\Lambda(x)} x^P z_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ナル置換ヲ行ヘバヨイ。

簡單ノ x ヲ x が實軸ニ沿ツテ $+\infty$ ニ近ツクトキ (2) が成立スルモノトスル。 $\lambda_j(x)$ ノ實部 $\rho_j(x)$ ハ x ノ整多項式デアルカラ $\rho_j(x)$ ハ恒等的ニ 0 トナルカ又ハ x が

十分 = 大きい所デ、キマツタ符号ヲ持ツ。依ツテ x が十分 = 大きいトキ

$$\Re \lambda_j(x) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_1)$$

$$\Re \lambda_j(x) \geq 0 \quad (j = n_1 + 1, \dots, n)$$

トスル。結論ヲ先ニ言ヘバ、

「(3) ナル形 = 展開サレル (1) ノ解ハ勝手ニ常数ヲ丁度 m 個含ム。」

$n_1 > 0$ ナラバソノヤウナ解ハ唯一ツ = キマラナイ。ソレヲキメル = ハ n_1 個ノ條件ヲ與ヘナケレバナラナイ。最モ簡單ナ條件ノ與ヘ方ハ十分 = 大キナ $x_0 (> 0)$ ヲ取り

$$(b) \quad y_j(x_0) = y_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_1)$$

トスルノデアル。 y_j^0 ハ勝手ニ與ヘラレタ常数デアル。

サテ証明ノ筋道ヲ簡單ニ述ベヨウ。

例 = 依ツテ

$$y_j = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_j^{(r)} x^{-r} + z_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ト置キ、 $z_1, \dots, z_n$ ノ方程式ヲ

$$(7) \quad \frac{dz_j}{dx} = \lambda_j(x) z_j + x^{-1} \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) z_k + b_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ト書ク。存在定理ヲ應用スル = ハ $\lambda_j(x) z_j$ ノ項が邪魔デアルカラ、更ニ

$$z_j = e^{\Lambda_j(x)} u_j$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; \Lambda_j(x) = \int \lambda_j(x) dx)$$

ト置ケル。 $u_1, \dots, u_n$ 方程式ハ

$$(8) \quad \frac{du_j}{dx} = \left\{ x^{-1} \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x) e^{\lambda_k(x)} u_k + b_j(x) \right\} e^{-\lambda_j(x)}$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

トナル。

$$(9) \quad y_j^0 = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_j^{(r)} x_0^{-r} + z_j^0, \quad z_j^0 = e^{\lambda_j(x_0)} u_j^0$$

ト置ケバ、條件 (6) ハ

$$(10) \quad u_j(x_0) = u_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

トナル。(3) ナル形ニ展開サレル (1) ノ解ヲ求メルノデアルカラ、コレト

$$(11) \quad u_j = O(x^{-N+p} e^{-\lambda_j(x)}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ヲ満足スル (8) ノ解ハ唯一ツ存在スルコトヲ証明スルベヨイ。

(p ハ N = 関係シナイ数)。ココデ解ノ存在定理ヲ使フノデアルカラ *Cauchy* ノ問題ニ関スル定理デハナイコトガ分ル。何故カト言ヘバ $j = 1, \dots, n$ ノ時ニハ x_0 = 於テ條件ガ與ヘラレテキルノニ $j = n+1, \dots, n$ ノ時ニハ $+\infty$ = 於テ條件ガ與ヘラレテキルカラデアル。コノニ於テ一般ニ $x_1, \dots, x_n, y_1^0, \dots, y_n^0$ ガ與ヘラレタ時

$$(12) \quad y_j(x_j) = y_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ナル條件ヲ満足スル解ノ存在ニ関スル定理ガ特異点ノ研究ニ重要デアルコトガ分ル。現在ノ場合ニハ拙著、常微分方程式論 (岩波講座) 定理 27 デ示サレタル。コノミウニシテ前

= 述べた定理ヲ証明スルコトが出来ル。

次=漸近展開 (2) か

$$\theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2$$

ヲ成立シテキル場合ヲ考ヘル。 $\arg x = \theta$ ナル直線=沿ッテ ∞ = 近ヅク場合=ハ $x = te^{i\theta}$ ト置キ、 t ヲ独立変数ニ取レバ前ノ結果ヲ使フコトが出来ル。 $\Re \lambda_j(x)$ = 相當スルモ、ハ $\Re e^{i\theta} \lambda_j(te^{i\theta})$ デアルカラ、ソノ符号が問題トナル。

$$\lambda_j(x) \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n')$$

$$\lambda_j(x) \equiv 0 \quad (j=n'+1, \dots, n)$$

トシヨウ。 $\lambda_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, n'$) ハ x ノ整多項式デアルカラ

$$\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)} x^{m_j} + \dots + \lambda_j^{(m_j)} \quad (\lambda_j^{(0)} \neq 0)$$

ト書クコトが出来ル。

$$\arg \lambda_j^{(0)} = \omega_j \quad (j=1, 2, \dots, n')$$

ト置ケバ t が十分大キイトキ $\Re e^{i\theta} \lambda_j(te^{i\theta})$ ノ符号ハ $\cos((m_j+1)\theta + \omega_j)$ ノソレト一致スル。故ニ $\cos((m_j+1)\theta + \omega_j)$ ($j=1, 2, \dots, n'$)ノ中ニ 0 = ナルモノガアルヤウナ方向 θ ハ特別ニ注意スル必要カアル。コレヲ (0 = 関シテ) 特異ナ方向ト呼ブコト=シヨウ。先ヅ $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ナル範囲=特異ナ方向が存在シナイ場合ヲ考ヘル。此ノ場合=拙著、常微分方程式論 (岩波講座) デ採ツタ方法ハ下手デアル。

次ノヤウナ方針ヲ進ム方が優レテキル。 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_0$ トシ、

θ_0 又 $\theta_2 = \pm \infty$ 近く取ッテオケル $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ナル範囲 = 特異ナ方向ハ存在スナリ。故ニ $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ナ

$$\cos((m_j+1)\theta + \omega_j) < 0 \quad (j=1, 2, \dots, n_1)$$

$$\cos((m_j+1)\theta + \omega_j) > 0 \quad (j=n_1+1, \dots, n)$$

ト假定スルコトが出来ル。圖ニ於テ Og_1, Og_2 ハ實軸ト θ_1, θ_2 ナル角ヲナス直線, x, x_2

ハ實軸ト θ_0 ナル角ヲナス直線

デアリ。 x, x_1, x_2, g_2 ナル折線

ニ沿ッテ微分方程式ヲ積分スル。

コノ折線ノ上ノ点ヲ $x = te^{i\theta(t)}$

ト表ハシ、尤ヲ独立変数ニ取レバ前ノ結果ヲ利用スルコトが

出来ル。從ツテ (10) 及ビ Og_2 ノ上ヲ (11) ヲ満足スル (8) ノ

解ハ唯ニツ存在シ x, x_1, x_2, g_2 ノ上ヲ

$$|u_j| \leq K |x^{-N+p} e^{-\Lambda_j(x)}| \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ヲ得ル。此ノ解ハ線分 x, x_2 ノ位置ニ関係シナイ。更ニ K が

x, x_2 ニ関係シナイヤウニキマルコトニ注意スレバ漸近展

開 (3) が $\theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2$ ナル範囲ニ於テ (1) ノ解ハ唯一

ツ存在スルコトが証明サレル。

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ が特異ナ方向ヲ含ム場合ハ次回ニ譲ツテ、

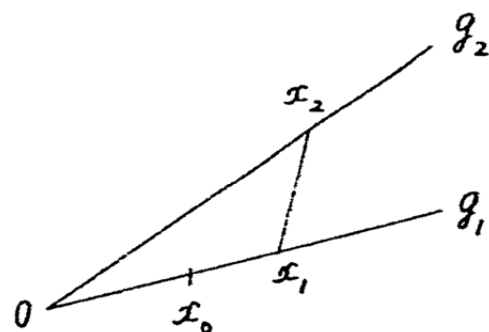
ココデ Trjitzinski ノ方法ニツイテ述ベテ置カヌ。Trjitzin-

ski ハ product-integral トカ、iteration トカイ

フコトヲ使ツテキルが、ソレハ與ヘテレタ初期條件ヲ満足ス

ル解ヲ求メル方法デアルカラ Cauchy ノ問題ニ關スル存在定

理ヲ使フコトニヨリソノ証明ヲ簡單ニスルコトが出来ル。



ソレデアレカラ *Cauchy* の問題 = 関スル存在定理ダケデ (3) ナル形 = 展開サレル解ノ存在ガ証明サレルワケデアル。從テ條件 (12)ヲ満足スル解ノ存在 = 関スル定理ヲ使ハナイデモヨイコト = ナリ、前ニ述べタコト = 矛盾スルヤウ = 見エル。斯シ *Cauchy* の問題 = 関スル存在定理ダケデ (3) ナル形 = 展開サレル解ノ存在ガ直接 = 証明サレルノデハナイコト = 注意シナケレバナラナイ。

今 $\lambda_1 = 0$ ノ場合ヲ考ヘル。コノ場合ニハ條件 (6) ガナクナツテシマフカテ、ソノ時ニ使フ定理ハ *Cauchy* の問題 = 関スルモノデアル。故ニソノヤウナ場合ニハ *Cauchy* の問題 = 関スル存在定理ダケデ間ニ合フ。モットー級ニ言ハベ次ノヤウニナル。例ヘバ実軸ノ上ニ

$$\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$$

トスル (番号ヲ適當ニツケレバ何時カモカウスルコトガ出來ル)。 (4) = 於テ $\lambda'(x) = \lambda_1(x)$ トスル。ソノトキ形式的解 (4)ヲ漸近展開トスル解ガ唯一ツ存在スルコトガ *Cauchy* の問題 = 関スル存在定理ヲ應用シテ証明サレル。此ノ解ヲ使ツテ微分方程式ノ階数ヲ一ツ下ゲルコトガ出來ル。ソコデ帰納法ヲ使ヘバ (3) ナル形 = 展開サレル解ノ存在ガ合ルノデアル。コノヤウニ帰納法ヲ使フ必要ヲ生ズルコト = 注意スベキデアル。更ニ特異ナ方向ニツイテ考ヘル必要ガアル。(5)ナル置換 = 依ツテ得ラレル $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ = 関スル微分方程式 = 於テ (1)ノ $\lambda_j(x)$ = 相當スルモノハ $\lambda_j(x) - \lambda(x)$ デアル。変換サレタ方程式ノ 0 = 関スル特異ナ方向ヲ $\lambda(x)$

= 関スル (1) ノ特異ナ方向ト呼ブコトニスル。 $\lambda(x) \neq 0$ ナ
 ラバ $\lambda(x)$ = 関スル特異ナ方向ト 0 = 関スル特異ナ方向ト一
 般ニ一致シナイカラ $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ が 0 = 関スル特異ナ方向ヲ
 含マナイデモ $\lambda_1(x)$ = 関スル特異ナ方向ヲ含ムカモ知レナイ。
 ソノマウナ $\lambda_1(x)$ = 對應スル解ヲ使ツテ微分方程式ノ階数ヲ
 下ゲルノデアアルカラ上ニ述べタ結果ニ違スルガケデモ樂ナ
 イ。コレガ帰納法ヲ使ハナイ方法ノ優レテキレーツノ理由
 デアル。

以上述べタ所ニヨリ大体想像ガツクト思フガ、 *Trjitzin-*
ski ノマウニ帰納法ヲ使フト、考ヘテキル範圍デ $\lambda_1(x), \dots$
 $\dots, \lambda_n(x)$ ノ間ニキマツタ順序ガツケラレナイト困ル。ソ
 ノマウナ範圍ガ *Trjitzinski* ノ *Regions R* デ、ソノ縁
 ニナル曲線ガ *Q curves* デアル。モツトハツキリ言ヘバ
 凡 $\lambda_j(x) = \lambda_k(x)$ ニ依ツテ定義サレル曲線ガ *Q curve*
 デ、ニツノ *Q curves* = 挟マレ、ソノ内部ニ *Q curve* ヲ
 含マナイ領域ガ *Region R* デアル。條件 (12) ヲ満足
 スル解ノ存在ニ関スル定理ヲ使ヘバコノマウモノヲ考ヘル必
 要ガナクナルノデアアル。