



Title	Principe de Schwarz ヲ満足スル函数ニ對スルー注意
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 105, p. 9-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74400
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

475. Principe de Schwarz を満足スル

函数ニ對スルニ注意

井上正雄(阪大)

$f(z)$ を複素数平面上ノ領域 Ω で定義サレター價連続ノ複素函数トスル。

Ω = 含マレル一点 z_0 を中心トシテ Ω = 含マレル任意ノ半径 R ノ閉円 $R(z_0)$ を画クトキ, $z \in R(z_0)$ ナル z = 對シテ恒 =

$$|f(z) - f(z_0)| \leq M(z_0, R) \chi\left(\frac{|z - z_0|}{R}\right)$$

が成立スルトキ, $f(z)$ ハ $z_0 = \tau$ $\chi(t)$ = 關シテ Principe de Schwarz を満足スルト云フ。⁽¹⁾

但シココ = $\begin{cases} M(z_0, R) = \text{Max}_{z \in R(z_0)} |f(z)| \\ \chi(t) \text{ ハ } [0, 1] \text{ で定義サレタ } \chi(0) = 0 \text{ ナル單調 = 増加スル連続實函数デアリ。} \end{cases}$

$f(z)$ が Ω へ $\chi(t)$ = 關シテ P. de S. を満足スル函数トシ

1) M. Kondo: Sur les fonctions générales définies dans le domaine des nombres complexes II. (Proc. of the Imp. Acad. XII, 1936, NO.4)

コノ論文ガハ更ニ $z = \tau$ 關スル polynôme $P(z) = f$ ヲ代入シタ函数 $P(f(z))$ が夫張リ Ω へ同ジ $\chi(t)$ = 關シ, 到ル處 P. de S. を満足スルト假定シタトキ, 得ラレル一聯ノ結果ガ悉數サレテイル。

テモ、(コレがケデモ相當キツイ條件デアルガ)、 $\chi(z) = \infty$ 以上ノ外何等ノ假定ナクシテハ、 $f(z)$ ノ *propriété métrique*ヲ導キ出スコトハ少シ困難ナ様デアル。

ソコデ今特ニ $\chi(z)$ ガ

$$\overline{D}_+ \chi(z) < +\infty$$

ナル條件ヲ満足スルモノト假定スルバ、(コレハ非常ニキツイ條件デアル)、之レニ對シ次ノ如キ結果が得ラレル。

定理 1.

$f(z)$ ガ Ω デ $\overline{D}_+ \chi(z) < +\infty$ ナル $\chi(z)$ ニ閉シテ殆ンド到ル處 $P. de S.$ ヲ満足スルモノトスルバ、 $f(z)$ ハ Ω デ殆ンド到ル處ニ微分可能デアル。

(證) 先ツ Ω ガ有界ナル場合ヲ考ヘル。

$f(z)$ ガ $P. de S.$ ヲ満足スル点集合ヲ $\underline{\Omega}$ トスルバ、勿論 $m \underline{\Omega} = m \Omega$ デアル。

$\underline{\Omega}$ ノ一處 $z = \zeta$ イテ $R(z) \subset \Omega$ ナル如ク R ヲ取ツトレバ、

$z + \Delta z \in R(z) = \text{對シテハ}$

$$|f(z + \Delta z) - f(z)| \leq M(z, R) \chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right)$$

$$\therefore \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \leq \frac{M(z, R)}{R} \cdot \chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right) / \frac{|\Delta z|}{R}$$

$$(0 < |\Delta z| \leq R)$$

$$\therefore \mathcal{L}_f(z, R) = 0. G. \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right|$$

$$\leq \frac{M(z, R)}{R} \cdot \text{O. G.} \left\{ \chi\left(\frac{|\Delta z|}{R}\right) / \frac{|\Delta z|}{R} \right\}$$

$$= \frac{M(z, R)}{R} \cdot \text{O. G.} \left\{ \frac{\chi(t)}{t} \right\}$$

シカレ $\chi(t)$ は $[0, 1]$ で連続且つ $\overline{D}_+ \chi(0) < +\infty$ 故

$$\text{O. G.} \left\{ \frac{\chi(t)}{t} \right\}$$

ハ存在レ且ツ有限デアル。

之レヲ α トシヌウ。即チ

$$\text{O. G.} \frac{\chi(t)}{t} = \alpha < +\infty$$

然ラバ $\mathcal{L}_f(z, R) \leq \frac{M(z, R)}{R} \cdot \alpha$

今 $R > R_1 > R_2 > \dots > R_n > \dots > 0$ 且ツ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

ナル正数列 $\{R_n\}$ ヲトレバ、 $\mathcal{L}_f(z, R_n)$ 定義ヨリ

$$\mathcal{L}_f(z, R) \geq \mathcal{L}_f(z, R_1) \geq \dots \geq \mathcal{L}_f(z, R_n) \geq \dots > 0$$

ナル故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_f(z, R_n) = \mathcal{L}_f(z) = \overline{\lim}_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| (> 0)$$

トスレバ

$$\mathcal{L}_f(z) \leq \frac{M(z, R)}{R} \cdot \alpha$$

即チ $\mathcal{L}_f(z)$ ハ有限デアル。

従ツテ $\underline{\mathcal{O}}_f = \mathcal{L}_f(z) < +\infty$ デアル。

次に $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ とスレバ

Ω , 各点 $z = x + iy$ へ

$$L_u(x, y) = \overline{\lim}_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq L_f(z) < +\infty$$

ナル故 $L_u(x, y)$ は Ω , 各点で有限ナリ。

従って Stepanoff-Rademacher の定理⁽²⁾ニヨリ $u(x, y)$ は Ω へ殆んど到ル處全微分可能ナリ。 $v(x, y)$ = ツイテモ全ク同様ナリ。

故ニ $u(x, y), v(x, y)$ がトモニ全微分可能ナル点集合ヲ $\underline{\Omega}$ とスレバ

$$m \underline{\Omega} = m \Omega = m \Omega \text{ ナリ}$$

且ツ $\underline{\Omega}$, 各点 $z = x + iy$ へ

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

$$f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i \{ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) |\Delta z| + i \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) |\Delta z| \right\}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon(\Delta z) |\Delta z|$$

2) 領域 Ω 内ノ可測集合 $E, mE > 0$ = ツイテ殆んど到ル處 $L_u(x, y) < +\infty$ ナラバ $u(x, y)$ は E へ殆んど到ル處全微分可能ナリ。

Stepanoff. Math. Ann. 90.

Rademacher. Math. Ann. 79.

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

$$\text{然ル} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon_i(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad (i=1, 2) \text{ ナル故}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$$

ヨツテ $f(z)$ ハ Ω = テ 全微分可能ナル。

故ニ結局 $f(z)$ ハ Ω = テ 殆ソド到ル處全微分可能ナル。

Ω が有界ナリ場合ニハ、原点ヲ中心トシ K_i ($K_i \leq K_{i+1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \infty$) ヲ半径トスル開円ヲ $K_i(0)$ トシ

$$\Omega \cdot K_i(0) = \Omega_i \quad \text{トスレバ} \quad \Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

トナル。

一般ニ Ω_i ハ有界開集合ナル。コノ Ω_i = 前述ノ議論ヲクリカヘセバヨイ。(勿論 Ω_i ハ領域ナリガ証明ニハ有界開集合ニテ充分ナル)

依ツテ $f(z)$ ハ Ω_i = テ ($i=1, 2, \dots$), 従ツテ Ω = テ 殆ソド到ル處全微分可能トナル。(証明了)

尚ホコノ証明方法ヲ解ル通り、コノ決論ヲ得ルニハ各点 $z = z_0$ 對シテ

$$|f(z) - f(z_0)| \leq M(z_0, R) \chi\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)$$

ナル R が少クトモ一ツ存在スレバ充分ナル。

更ニ次ノ定理ノ成立スルコトヲ注意シマウ。

定理 2.

$f(z)$ が $\overline{D}_r \chi(0) < +\infty$ ナル $\chi(t)$ = 関シテ Ω ナ可
附番点集合ヲ除キ $P. de S.$ ヲ満足スルモノトシ、更ニ

I. Ω が始点到達点で条件 K' (或 K'') ⁽³⁾ を満足すれば $f(z)$ は Ω で正則である。

II. $f(z)$ が *directe* な函数とし、 Ω が始点到達点で条件 K'' を満足すれば $f(z)$ は Ω で正則である。

(證) 先が最初 Ω が有界トシヤウ。

$$d(z, \mathcal{F}(\Omega))^{(4)} > \delta (> 0)$$

ナル $\Omega = \Omega_\delta$ である。

Ω_δ の集合を Ω_δ とすれば Ω_δ は開集合である。

δ を充分小トリサへすれば $\Omega_\delta \neq \emptyset$ トナル。以上ノ如ク δ を決メテモトスル。

シカラバ

$$d(\mathcal{F}(\Omega), \mathcal{F}(\Omega_\delta)) = \delta$$

ナル故

Ω_δ の各点 z を中心トシテ $\frac{\delta}{2}$ を半径トスル閉円 $\bar{\Omega}_\delta(z)$ を画ケバ $\bar{\Omega}_\delta(z) \subset \Omega$ である。

$\mathcal{K} = P. de S.$ を満足スル Ω_δ の真集合を $\underline{\Omega}_\delta$ と表ハセバ、 $m \underline{\Omega}_\delta = m \Omega_\delta$ 且ツ $\Omega_\delta - \underline{\Omega}_\delta$ は可附番点集合である。

$\underline{\Omega}_\delta$ の各点 z へ

3) 条件 K', K'', K''' = 関シテ本誌102号, 463 参照。

4) $\mathcal{F}(\Omega)$ は Ω の境界点ノ集合ヲ示シ。

$d(z, \mathcal{F}(\Omega))$ は z と $\mathcal{F}(\Omega)$ とノ距離(最短)ヲ示ス。

$$\mathcal{L}_f(z) \leq \frac{2M(z, \frac{\delta}{2})}{\delta} \cdot \alpha$$

シカ $\mathcal{L} =$

$$M(z, \frac{\delta}{2}) \leq \text{Max}_{z \in \Omega_{\frac{\delta}{2}}} |f(z)| \stackrel{(5)}{=} M < +\infty$$

ナル故

$$\mathcal{L}_f(z) \leq \frac{2M\alpha}{\delta}$$

即チ $\mathcal{L}_f(z)$ ハ Ω_{δ} 有界ナル。シカ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f(z)$ ハ可測
 函数ナル故 $\mathcal{L}_f(z)$ ハ Ω_{δ} 上テ從ツテ Ω_{δ} 上テ積分可能(L)
 ナル。

故ニ本誌第102号 463 定理3ニヨリ $f(z)$ ハ Ω_{δ} 上
 正則ナル。

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_{\delta} = \Omega$$

ナル故、結局 $f(z)$ ハ Ω 上正則ナル。

Ω 有界ナル場合ハ

$$\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(0) \Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

トシテ表ハサレル。

$f(z)$ ハ Ω_i ($i=1, 2, \dots$) 上正則ナルカラ從ツ
 テ又 $\Omega = \sum \Omega_i$ 上正則ナル。(証明了)

5) $\overline{\Omega_{\frac{\delta}{2}}}$ ハ $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ 閉包 (abgeschlossene Hülle) ナル。

以上ハ極簡單ナル計算ヨリ導キ出シ又結果ヲアツテ、單
ナル *remarque* = スギナイ、事實コレヲハ未ダ定理ノ諸條件
ヲ十分使ヒキツテイルトハ云ヘナイ氣カスルノカアル。
更ニ精密ナル計算ニヨル、ヨリ以上ノ結果カ望マシイ。