



Title	Quasi-analytic class of functions, I
Author(s)	河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 106, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74407
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

482. Quasi-analytic class of functions. I

河田 龍夫 (= 高橋 龍夫) (康秋)

是カラ証明セントスル定理ハ次ノモノデアル。即チ

Theorem 1. $p(x)$ ヲ $(0, \infty)$ デ define サレタ positive function トシ且ツ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(|x|)} |x|^n dx < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

トスル。

$1 \leq p \leq 2$ + ルアル p = 對シテ $f(x)$ ハ $L_p(-\infty, \infty) =$ 屬スルトスル、更ニ $f(x)$ ハ無限回 differentiable デソノ Fourier transform ヲ $F(x)$ トスル。即チ

$$F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt$$

然ルトキ殆ンドスベテノ x = 對シテ

$$|F(x)| < A e^{-p(|x|)} \quad (A \text{ ハ 常数デアアル})$$

ガ成立スル如キ $f(x)$, class ガ quasi-analytic + ルタメニハ

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2} dx$$

ノ diverge スルコトガ必要充分デアアル。

エノ定理ハ quasi-analytic class ノ理論 = オケル Paley-Wiener ノ fundamental theorem ノ immediate corollary デアル。併シ上ノ定理カラ竹中、泉西

氏 = ヨツテ得ラレタ $\{t^n\}$ の $(-\infty, \infty)$ に於ケル closure
 の定理ヲ更ニ完全ナ形ニ於テ証明出来ルコトト、更ニ *Mandelbrojt* の定理 (periodic function, Fourier
 coeff. = アル order の制限ノアル如キ函数ノ class が quasi-
 analytic ナルタメノ條件ヲ求メタモノ) モ直チニ定理 1 カ
 ラ得ラレルトイフ以上ニツノ事柄ニヨリ上ノ定理ハ興味アル
 モノト思ハレル。

念ノタメニ *Paley-Wiener* の定理ヲ掲ゲテオク。

Theorem. (*Paley-Wiener*). $\phi(x)$ が real non-negative ナ $-\infty < x < \infty$ ナ zero = equivalent ナイトス
 ル、且ツ $(-\infty, \infty)$ ナ L_2 = 属スルトスル。然ルトキ次ノ條
 件ヲ満足スル如キ $g(x)$ ノ real 或ハ complex valued
 function $g(x)$ が exist スルタメニハ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \phi(x)|}{1+x^2} dx < \infty$$

ナルコトが必要且ツ充分ナル。 $g(x)$ ノ満足スベキ條件ト
 ハ

(i) アル x_0 = 對シテ $g(x) = 0$ for $x \geq x_0$. 且ツ
 zero = equivalent ナイ。

(ii) $g(x)$ ノ Fourier transform ヲ $G(x)$ トスルト
 $|G(x)| = \phi(x)$

Theorem 1 の証明。

1°. (i) ノ diverge スルコトノ必要ナコト。

モシ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2} dx < \infty$$

上、Paley-Wiener's Theorem カラ ヲツ、 $f(x)$ が exist し $f(x)=0$ for $x \geq x_0$, 且ツ $f(x)$, Fourier transform ヲ $F(x)$ トスル

$$(2) |F(x)| = e^{-p(|x|)}$$

$F(x)$, Fourier transform $\wedge$ $f(x)$ = equivalent
 $\Rightarrow$ $f_1(x)$ トスル

$$f_1(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} dt,$$

且ツ (2) カラ $f_1(x)$ $\wedge$ infinitely often differentiable
 $\Rightarrow$ $f_1(x) = 0$ for $x \geq x_0$. 故ニ必要ナルコトが証明
 サレタ。

2°. (1) / diverge スルコトノ 充余ナルコト. 考フル
 functions , class が quasi-analytic $\Rightarrow$ イトシ
 コノ class = 属シ. $f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow$ identically = zero
 $\Rightarrow$ イ function $f(x)$ がアルトスル。

アル x_1 = ~~對~~ シテ $f(x)$ $\wedge$ zero = ナラナイが, コノ x_1 ヲ
 $x_1 < 0$ トシテオイテヨイ。

$$\begin{aligned} \text{今 } f_1(x) &= f(x) \text{ for } x < 0 \\ &= 0 \text{ for } x \geq 0 \end{aligned}$$

トスル $f_1(x)$ $\wedge$ everywhere infinitely often dif-
 ferentiable $\Rightarrow$ f_1 , transform ヲ $F_1(x)$ トスル

$$|F_1(x)| \leq A e^{-p(|x|)}$$

故ニ $0 < p(|x|) \leq \log A + \log |F_1(x)|$. 然ルニ Paley-

Wiener's theorem カラ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |F_r(x)||}{1+x^2} dx < \infty$$

$$\text{故} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(|x|)}{1+x^2} dx < \infty \quad (\text{証明了})$$

Theorem 2. $|f(x)| \leq A e^{-P(|x|)}$ (almost everywhere)

$$\text{且ツ} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(|x|)} |x|^n dx < \infty \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

トスル。然ルトキ, モシ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^n dx = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

ナラバ常 $= f(x) = 0$ (almost everywhere) トルヲ
トハ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(|x|)}{1+x^2} dx = \infty$$

ナルコトが必要且ツ充分デアアル。

充分ナル事。 $f(x)$, transform $\Rightarrow g(x)$ トスルト

$$(B) \quad g(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt$$

$g(x)$, transform $\Rightarrow G(x)$ トスルト $G(x) = f(x)$
(almost everywhere)

假定カラ $|G(x)| \leq A e^{-P(|x|)}$ (3) カラ

$$g^{(n)}(0) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t^n dt = 0$$

故 = Theorem 1 = $\Rightarrow$ $g(x) = 0$ (alm. ev.) 随ッテ
 $G(x) = 0$ (alm. ev.) 故 = $f(x) = 0$.

必要ナル事. $g(x)$, class ハ上 = 示シタ如ク quasi-analytic ナル故 =
 Theorem 1 $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(|x|)}{1+x^2} dx = \infty \quad (\text{証明了})$$

Mandelbrojt , Theorem モコソナ調子 = スゲ証明
 ナレル。 証明ハ後 = 譲ラシテ頂キマス。