



Title	函数展開ノ一形式ト其ノ收斂問題 (I)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 108, p. 9-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74418
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

493. 函数展開ノ一形式ト其ノ收斂問題(I)

北 川 敏 男 (阪大)

1. 線状常微分方程式ノ境界値問題ニ関係シテ、任意函数ノ展開問題ハ可成リノ程度マデ *Birkhoff*, *Tamarkin*, *Stone*⁽¹⁾ 等ニヨリ論究サレヲキルコトハヨク知ラレタコトデアルガ、最近 *J. Delbarte*⁽²⁾ ハコレト稍々趣ヲ異ニシタ函数展開ノ一方式ヲ発表シタ。ソノ方式ハ相當廣汎ナリデ

(1) *Birkhoff*, *Transactions of the American M. S.* 9 (1908)
Tamarkin, *Math. Ztschr.* 27 (1927)

Stone, *Transactions of the American M. S.* 28 (1926)

(2) *J. Delbarte*

(i) Sur un principe générale de développement des fonctions d'une variable réelle en séries de fonctions entières. *C. R. Paris* N° 8 (18 Février 1935)

(ii) Sur l'application d'un principe général de développement des fonctions d'une variable, aux séries de fonctions de Bessel. *C. R. Paris* N° 13 (25 Mars 1935)

(iii) Sur un procédé de développement des fonctions en séries et sur quelques applications *Journ. d. mathém. Tome Quinzième*, 1936.

アルコトハ、着目 = 値スルノデアツテ、例へバ、應用數學上重要ナ Bessel 函数ノ展開 = ツイテミテモ、Bessel-Fourier, Bessel-dini, Schlömilch 等ノ級数ヲ一望 = 收メテキル。氏ハコレヲノコトヲ示シタノチ、級数ノ収斂ヲ問題トシテ残シテキル。以下其レ = 關シテ若干ノ事柄ヲ報告シタイノデアルガ、一般的 = 解決スルコトハ到底困難デアロウカラ、特殊ノ場合ヲ屢々テ逐次進ンデ行キタイト思フ。

其ノ前 = 、J. de la Hire ノ方法ヲ今少シ拡張シテ置ク必要ガアル。(ソノ理由ハ便宜上 §4 後述 = 譲ル)

コノ問題ノ論究ガ必要ト感ゼラレル = 至ツタノハ、他ノ方面カラデアアル。任意函数ノ展開問題ヲ基礎工事 = シテ或ル種ノ線状函数方程式 = 進ンデ行クコト、ソレガ最後ノ目標デアルケレドモ、ソレハ凡ソテ基礎ガ出来テカラノ論題ガアル。

2. 規約並 = 假定。本節 = 於テハ以下使用スル記号並 = 假定ヲ掲ゲル。

[I] *espace* X ノ任意ノ *élément* ヲ x デ表ハス。

[II] $(A), (B), (C)$ ハ夫々 X ノ或ル部分集合ヲ定義サレタ函数 $f(x)$ ノ或ル *classe linéaire* デアツテ

$$(A) \supset (B) \supset (C)$$

トスル。

[III] *Éléments fondamentaux*: コレハ *espace antilinéaire* Λ ノ *élément* λ = *paramétrique* = *dépend* シ X ノ或ル部分集合ヲ定義サレタ函

数 $j_{\lambda}(x)$ を意味スル。

(IV) $(A) =$ 属スル函数 $j_{\lambda}(x)$ ハ $\Lambda =$ 於イテ $\sim$ ツノ
multiplicité m_{λ} ヲツクル。茲 $= m_{\lambda}$ ハ複素平面ノ por-
tion connexe $=$ topologiquement équivalent
デアアル。

(V) $\mathcal{D}f$ ハ $(B) =$ テ定義サレタ opérateur linéaire
デアツテ次ノ如キ propriété spectrale ヲモツ；即チ
 $\lambda \in m_{\lambda}$ ナル限リ

$$\mathcal{D}[j_{\lambda}(x)] = \varphi(\lambda) j_{\lambda}(x)$$

(VI) Premier principe d'unicité : $m_{\lambda} =$ 属ス
ル任意ノ各 $\lambda =$ 関シテ

$$\mathcal{D}[f(x)] = \varphi(\lambda) f(x)$$

ナル $f(x) \in (B)$ ハ必ズ

$$f(x) = k j_{\lambda}(x) \quad (k \text{ ハ任意ノ常数})$$

(VII) Deuxième principe d'unicité : $f(x) \in (A)$,
且ツ $\lambda \in m_{\lambda}$ ナル限リ

$$\mathcal{D}[g(x)] = \varphi(\lambda) g(x) + f(x)$$

ナル如キ $g(x) \in (C)$ ハ一ツ、而シテ唯一ツ存在スル。コ
レヲ $\mathcal{L}_{\lambda}[f(x)]$ テ表ハス。

(VIII) 函数系 $\{j_{\lambda_1}, j_{\lambda_2}, \dots, j_{\lambda_{n-1}}, j_{\lambda_n}(x)\}$ ノ導入
之レハ induction $=$ 依リ次ノ如ク定義スル。

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad \mathcal{L}_{\lambda_2}[j_{\lambda_1}(x)] &= \frac{j_{\lambda_2}(x) - j_{\lambda_1}(x)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \\ &= \left(\frac{\partial j_{\lambda}(x)}{\partial \varphi(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_1} \quad (\lambda_1 = \lambda_2) \end{aligned}$$

ナリト假定シ、コレヲ $f_{\lambda_1, \lambda_2}(x)$ デ表ハス。カクシテ $n=2$ ノトキが出来タ。

2°. 一般ニ、 $n-1$ マデスベテノ組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ ニツイテ $f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(x)$ が定義シエタトキ

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{\lambda_n} [f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(x)] \\ &= \frac{f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_n}(x) - f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}}(x)}{\varphi(\lambda_n) - \varphi(\lambda_{n-1})} \end{aligned}$$

($\lambda_n \neq \lambda_{n-1}$)

$$= \left(\frac{\partial f_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}(x)}{\partial \varphi(\lambda)} \right)_{\lambda = \lambda_n} \quad (\lambda_n = \lambda_{n-1})$$

= ヨツテ n ノ場合任意ノ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ニツイテ定義スル。

以下重要ナノハ、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ ノ場合デアツテ、コノトキ $f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x)$ ヲ特ニ $f_{\lambda^n}(x)$ デ表ハス。

[IX] Fonctionnelle $\mathcal{S}$ トコレニ附随スル正則函数 $\{A_n(\lambda)\}$

Fonctionnelle $\mathcal{S}$ ハ任意ノ $f(x) \in (A)$ ニ對シテ定義サレ、特ニ

$$\mathcal{S} [f_{\lambda^n}(x)] = A_{n-1}(\lambda) \quad (n=1, 2, \dots)$$

ト置クトキ $A_n(\lambda)$ ハ $\mathcal{S}$ ニ於イテ正則デアツテ

$$A_n(\lambda) = \frac{\partial A_{n-1}(\lambda)}{\partial \varphi(\lambda)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

今 $A_0(\lambda) = 0$ ノ根ヲ適當ニ順序ヤケタトシテ $\{\lambda_n\}$ デ

表ハストキ

$$A_{\nu}(\lambda_k) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1)$$

$$\neq 0 \quad (\nu = m_k)$$

ナレ如キ $\{m_k\}$ が對應シテキルトスル。

3. 展開問題: §2ノ假定ノモトニ於イテ、次ノ如キ對應カ問題トナル。

I (A) = 属スル任意ノ函数 $f(x)$ = 對シテ

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{m_k} \alpha_{k,\nu} j_{\lambda_k^{\nu}}(x) \right)$$

ナル級数カ一意ニ對應シ

II. ソノ對應ニ於イテ、特ニ

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^N \sum_{\nu=1}^{m_k} \beta_{k,\nu} j_{\lambda_k^{\nu}}(x)$$

ナル場合ニハ $\beta_{k,\nu} = \alpha_{k,\nu}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$)

$$\beta_{k,\nu} = 0 \quad (k > N)$$

トナル。

コノ様ニ對應カ得ラレナイカ? 答ハ容易デアツテ、今若シ $\varphi(\lambda)$ が $\Re$ デ正則デアアルナラバ、 $\Re$ < 属スル contour C ヲ適當ニトルコトニヨツテ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{j_{\lambda}(x)}{A_0(\lambda)} \delta \{L_{\lambda}[f(x)]\} d\varphi(\lambda)$$

ナル Contour-integral = ヨツテ與ヘラレル。

然ラバ、何等カノ意味デ $f(x)$ = 收斂スルヤウニ $\{C\}$

ヲ選ビツルタメニハ、如何ナル條件が必要ニナルカ或ハ充分

デアるか？ コレが吾々ノ問題ナノデアル。

コレニ就イテ次回カラ井歩ヲ縮メラミタイト思フ。

今回ハ若干ノ *Remarks* ト例ト、§1ノ終リニ申シ残シタ
コトヲ次§4ヲ述ビノ終リトスル。

4. 例及ニ附言

例1. *espace* X ヲ區間 $[0, 1]$ ニトリ (A) ヲ $[0, 1]$ ニ *Lebesgue* 積分可能ナル函数ノ全体, (B) ハ $[0, 1]$ ニ微分可能ナル函数ノ全体, (C) ハ (B) ニ屬シ且ツ
 $f(0) = 0$ ナル如キ $f(x)$ ノ全体ニトル。然ルトキ

$$\mathcal{D}f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}, \quad \mathcal{D}(\lambda) \equiv \lambda$$

トスルトキ

$$\mathcal{L}_\lambda[f(x)] = \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi$$

$$j_{\lambda^\nu}(x) = x^\nu e^{\lambda x}$$

トナルコトが容易ニワカル。*delelsarte* ハ、 $A_0(i)$ ノ零
点ニ於イテハ $A_1(i)$ (吾々ノ *Notation* デ) ハ零ニナラヌ
トシタノデ、 $\{j_{\lambda^\nu}(x)\}$ ナル *classe* ニ於イテ $\nu=1$ ノ場合
シカ考慮シテキナイコトニナル。コレヲハ、線状可遷作用素
ノ場合ノ展開問題が包含サレス。ソノタメニ $(VII)-(IX)$ ニ
於イテ *delelsarte* ノ方法ヲ拡張セバナラナカツタノデア
ル。

尚、注意スベキハ、カク拡張シタ曉ニハ、線状可遷作用
素ノ場合ヨリモ、モット一般ニナツテキルコトデアル。

母函数ト吾々が呼ブモノハ、*Opérateur linéaire*
 $\Gamma f(x) =$ 於イテ $f(x) = e^{\lambda x}$ ト置イテ、更ニ $x=0$ トシタ
 モノデアール。

$[\Gamma f(x)]_{x=0}$ ハタシカニ、一ツノ *fonctionnelle* ニハ
 相違ナイカラ、今ノ方式ニ確カニ含マレテキル、シカモ、
Opérateur トシテ、 $\Gamma =$ ハ $\Gamma[\mathcal{D}f(x)] = \mathcal{D}[\Gamma f(x)]$ (適
 當ニ $f(x)$ ニ對シテ) ナル條件ガツイラダケ特殊トミナケレ
 バナラナイ。

$$\text{例2. } \mathcal{D}[f] \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{df}{dx} \quad (R(p) > -1)$$

ニ對シテハ $\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda^2 =$ トルトキ

$$f_{\lambda}(x) = \frac{2^p p!}{(\lambda x)^p} J_p(\lambda x)$$

トナルコトハ J. Delbarte [3] ニ示サレテキル。コノ場合
 ニモ、吾々ノ $f_{\lambda}(x)$ ハ極メテ簡單ニ計算サレル、ソレハ p
 ヨリモ次数ノ整数値ガケ高イ Bessel 函数カラ得ラレルコ
 トガワカル。(委シクハ次ニ譲ル)