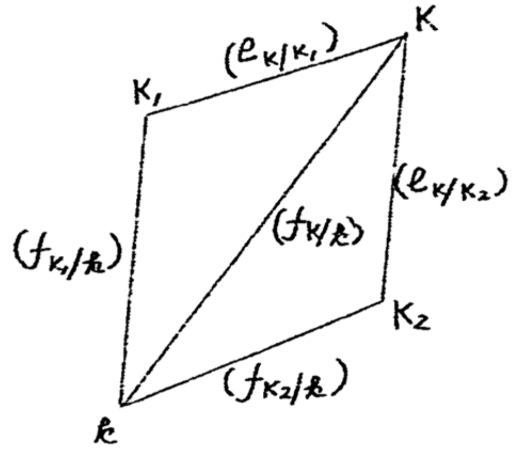
| | |
|---|---|
| Title | 『整数論ノ一問題ニ就テ』 |
| Author(s) | 河田, 敬義 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1936, 109, p. 6-10 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74420 |
| rights | |
| Note | |

# 495.『整数論ノ一問題ニ就テ』

河田 敬義（東大學生）

$k$ ヲ有限次代數体，$K_1, K_2$ ヲ $k$ ノ有限次擴大体デ，$K_1 \cap K_2 = k$ トシ，$K_1, K_2$ ノ *Kompositum* ヲ $K$ トスル。$K, K_1, K_2$ 及ビ $k$ ノ *Hauptordnung* ヲ夫々 $\mathfrak{O}_K, \mathfrak{O}_{K_1}, \mathfrak{O}_{K_2}$ 及ビ $\mathfrak{o}$ トシ $\mathfrak{O}_K$ ノ *Primideal* ヲ $\mathfrak{P}_K$，$\mathfrak{O}_{K_1}, \mathfrak{O}_{K_2}$，$\mathfrak{o}$ ニ於テ $\mathfrak{P}_K$ デワレル *Primideal* ヲ夫々 $\mathfrak{P}_{K_1}$，$\mathfrak{P}_{K_2}$，$\mathfrak{p}$ トシ，$N_{K/k} = \mathfrak{p}^{f_{K/k}}$，$\mathfrak{P}_K^{e_{K/K_1}} \| \mathfrak{P}_{K_1}$ トイフヤウニ次數分岐指數ヲ表ハスコトニスル。




目標ハ $\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$ ナルタメノ必要充分條件ヲモトメルコトデアル。

〔A〕『$\mathfrak{O}_K / \mathfrak{P}_K = (\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}) / \mathfrak{P}_K$

$$= (\mathfrak{O}_{K_1} / \mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (\mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_{K_2}) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f = \frac{f_{K_1/k} \cdot f_{K_2/k}}{(f_{K_1/k}, f_{K_2/k})}$$

トオケバ　$f_{K/k} = f$　ナルコトデアル』

（証明）　$\mathfrak{O}_K \geqq \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$　ヨリ

$$\mathfrak{O}_K / \mathfrak{P}_K \geqq \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_K \text{ ---------- } (2)$$

又　$\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_K \geqq (\mathfrak{O}_{K_1} / \mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (\mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_{K_2})$ ------- (3)

トナル。

今 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ノ元ノ數ヲ $q$ トスレバ，$\mathfrak{O}_K / \mathfrak{P}_K$ ノ元ノ數ハ $q^{f_{K/k}}$ 等デアルカラ (2)(3) ヨリ

$$GF(q^{f_{K/k}}) \geqq GF(q^{f_{K_1/k}}) \cdot GF(q^{f_{K_2/k}})$$
$$= GF(q^{f}) \text{ ------- } (4)$$

トナル。故ニ $f = f_{K/k}$ ト (2)(3) ノ $\geqq$ ガ $=$ トナルコトハ *äquivalent* デアル。

（注意）　(3) ノ左辺カラ右辺ニウツスコトハ，左辺ニテ *Restklasse* ノ代表トシテアラハレル $\mathfrak{O}_{K_1}$ ノ元ヲ $\mathfrak{O}_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}$ ノ *Restklasse* へ，$\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ元ヲ $\mathfrak{O}_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2}$ ノ *Restklasse* ニオキカヘル。

*Homomorphismus* ガ得ラレル。故ニ (3) ガ等号ノ成立ツコトハ，コレガ *Isomorphismus* デアルコトヲ示ス。コノ場合左辺ノ *Nullklasse* ノ元ハ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i$，$\mathfrak{p}_{K_1} / \alpha_i$ 又ハ $\mathfrak{p}_{K_2} / \beta_i$；$(i = 1, \text{------} r,)\ \alpha_i \in \mathfrak{O}_{K_1},\ \beta_i \in \mathfrak{O}_{K_2},)$ トイフ形ニアラハサレル。

〔B〕 K ノ $\mathfrak{P}_K$-*adische Erweiterung* ヲ $K_{\mathfrak{P}_K}$ トシ，コヽデ $\mathfrak{O}_K$ ノ $\mathfrak{p}_K$-*adische Grenzmenge* ヲ $(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{P}_K}$ 等

デ表ハスコトニスル。

『 $(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K} = (\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} \quad (= (\mathfrak{O}_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}}\cdot(\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}})$ ……(5)

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f_{K/k} = f, \quad \text{及ビ} \quad e_{K/K_1} = 1 \quad \text{又ハ} \quad e_{K/K_2} = 1$$

ナルコトデアル』

（証明） 充分ナルコトハ (1) 式ノ成立ト $\mathfrak{p}_K // \pi_K$ ナル $\pi_K$ ガ $\mathfrak{O}_{K_1}$ 又ハ $\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ中ニトレルコトヨリ (5) ノ最初ノ等式ヲ得ル。

第二ノ等式ハ一般ニ成立ツ。即：

$$(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} = (\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}}$$
$$= (\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}})\cdot(\mathfrak{O}_{K_2}\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}}) = (\mathfrak{O}_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}}\cdot(\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}} \text{……(6)}$$

トナル。

必要ナルコトハ (5) ノ Einheit ヲ考ヘレバ (1) ガ成立チ $f = f_{K/k}$ トナル，又最小ノ Bewertung ヲ與ヘル元ヲトレバ，$\mathfrak{p}_K // \pi_K$ ナル $\pi_K$ ガ $\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ 中ニモトメラレルコトカラ．〔A〕ノ（注意）ニヨリ、カヽル $\pi_K$ ハ $\mathfrak{O}_{K_1}$ 又ハ $\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ中ニ求メラレネバナラナクナル。故ニ $e_{K/K_1} = 1$ 又ハ $e_{K/K_2} = 1$ ヲ得ル。

（注意） (6) 式ヨリ (3) ;デ常ニ等号ノ成立ツコトガワカル。
故ニ (1) ノ最後ノ等式ノ條件トハ何モ関係シナイ。

〔C〕『 $\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ ……………(7)

ナルタメノ必要充分條件ハ $\mathfrak{O}_K$ ノスベテノ Primideal $\mathfrak{p}_K$ ニツイテ

$$(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K} = (\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} \text{……………(8)}$$

ナルコトデアル』

（証明）必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトハ $\mathfrak{f}=\prod_{i=1}^{g}\mathfrak{p}_K^{(i)}$ トスレバ

$K\times k_{\mathfrak{f}}\cong K\mathfrak{p}_K^{(1)}+\cdots\cdots+K\mathfrak{p}_K^{(g)}$ デアルカラ（$\times$, $+$ ハ直積及ビ直和）

$(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})\times\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\cong(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})\mathfrak{p}_K^{(1)}+\cdots\cdots+(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})\mathfrak{p}_K^{(g)}$

(8) ヨリ $=(\mathfrak{O}_K)\mathfrak{p}_K^{(1)}+\cdots\cdots+(\mathfrak{O}_K)\mathfrak{p}_K^{(g)}\cong(\mathfrak{O}_K)\times\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ トナリ

E. Noether ノ Modulsatz* ヨリ (7) ガ成立スル。

(*E. Noether: Zerfallenende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen; actualités ……, 1934. S. 11. §II. Hilfssatz 及ビ脚註)

〔D〕『$\mathfrak{O}_K=\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ ナルタメノ必要充分條件ハ

$$(D_{K/K_1},\ D_{K/K_2})=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

及ビ $\mathfrak{p}_K/(D_{K_1/k},\ D_{K_2/k})$ ……(10)

ナルスベテノ $\mathfrak{p}_K$ ニ對シテ

$$f=f_{K/k} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

トナルコトデアル。』

但シ $D_{K/K_1}$ 等ハ K カラ $K_1$ ヘノ Relativdiskriminant 等ヲ表ハスモノトスル。

〔E〕『$\mathfrak{O}_K=\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ ナルタメノ充分條件ハ

$$(D_{K_1/k},\ D_{K_2/k})=1 \quad\cdots\cdots (12)$$

ナルコトデアル』

（D, E ノ證明）〔D〕ハ $\mathfrak{p}_K$ ヲ (10) ナルモノニ限ラズ $\mathfrak{O}_K$ ノ

スベテノ Primideal ニワタルナラバ〔B〕〔C〕ノ直接ノ結果デアル。

(10) 以外ノ $\mathfrak{p}_K$ デハ (11) ノ成立ツコト，及ビ (12) ヨリ (9) ヲ得ルコトハ

M. Moriya: Über einen Satz von Herbrand 北大理學部紀要 Ser. I. vol. IV. 1936. ヨリワカル。——

〔E〕ハ D. Hilbert: Zahlbericht Satz 88，及ビソノ拡張。

K. Asano: Zur Diskriminante einer Algebra (數學輯報 Vol. XII, 1935) ノ §2. Satz 6 デアル。

——(終)——