OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	『整数論ノ一問題ニ就テ』
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 109, p. 6-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74420
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

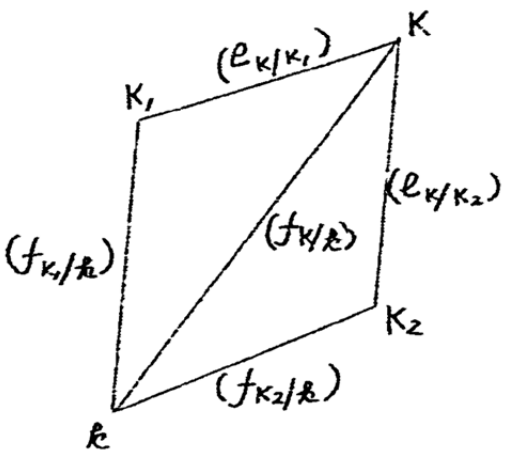
https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

495. 『整数論ノ一問題ニ就テ』

河田敬義（東大學生）

kヲ有限次代数体，K_1, K_2ヲkノ有限次拡大体デ，$K_1 \cap K_2 = k$トシ，K_1, K_2ノ Kompositum ヲKトスル。K, K_1, K_2及ビkノ Hauptordnung ヲ夫々O_K, O_{K_1}, O_{K_2}及ビO_Kノ Primideal ヲ$\mathfrak{P}_K$，O_{K_1}, O_{K_2}，ニ於テ$\mathfrak{P}_K$デワレル Primideal ヲ夫々$\mathfrak{P}_{K_1}, \mathfrak{P}_{K_2}$，$\mathfrak{p}$トシ，$N_{K/k} = \mathfrak{p}^{f_{K/k}}$，$\mathfrak{P}_K^{e_{K/K_1}} \| \mathfrak{P}_{K_1}$トイフマタ一次数分岐指数ヲ表ハスコトニスル。



目標ハ$O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ナルタメノ必要充分條件ヲモトメルコトデアル。

〔A〕『$O_K/\mathfrak{P}_K = (O_{K_1} \cdot O_{K_2})/\mathfrak{P}_K$

$$= (O_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (O_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f = \frac{f_{K_1/k} \cdot f_{K_2/k}}{(f_{K_1/k}, f_{K_2/k})}$$

トオケバ $f_{K/k} = f$ ナルコトデアル』

(証明) $O_K \supseteq O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ ヨリ

$$O_K / \mathfrak{P}_K \supseteq O_{K_1} \cdot O_{K_2} / \mathfrak{P}_K \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

又 $O_{K_1} \cdot O_{K_2} / \mathfrak{P}_K \supseteq (O_{K_1} / \mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (O_{K_2} / \mathfrak{P}_{K_2}) \quad \cdots\cdots (3)$

トナル。

今 $O/\mathfrak{p}$ ノ元ノ数ヲ q トスレバ，$O_K/\mathfrak{P}_K$ ノ元ノ数ハ $q^{f_{K/k}}$ 等デアルカラ (2)(3) ヨリ

$$GF(q^{f_{K/k}}) \supseteq GF(q^{f_{K_1/k}}) \cdot GF(q^{f_{K_2/k}})$$
$$= GF(q^{f}) \quad \cdots\cdots (4)$$

トナル。故ニ $f = f_{K/k}$ ト (2)(3) ノ $\supseteq$ ガ $=$ トナルコトハ äquivalent デアル。

(注意) (3) ノ左辺カラ右辺ニウツスコトハ，左辺ニテ Restklasse ノ代表トシテアラハレル O_{K_1} ノ元ヲ $O_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}$ ノ Restklasse ヘ，O_{K_2} ノ元ヲ $O_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2}$ ノ Restklasse ニオキカヘル。

Homomorphismus デ得ラレル。故ニ (3) ガ等号ノ成立ツコトハ，コレガ Isomorphismus デアルコトヲ示ス。コノ場合左辺ノ Nullklasse ノ元ハ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i$，$\mathfrak{P}_{K_1}/\alpha_i$ 又ハ $\mathfrak{P}_{K_2}/\beta_i$；$(i = 1, \cdots\cdots r,)\ \alpha_i \in O_{K_1},\ \beta_i \in O_{K_2},)$ トイフ形ニアラハサレル。

〔B〕 K ノ $\mathfrak{P}_K$-adische Erweiterung ヲ $K_{\mathfrak{P}_K}$ トシ，コンデ O_K ノ $\mathfrak{P}_K$-adische Grengmenge ヲ $(O_K)_{\mathfrak{P}_K}$ 等

デ表ハスコトニスル。

『 $(O_K)_{\mathfrak{p}_K} = (O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K}$ $(= (O_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}} \cdot (O_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}})$ ……(5)

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f_{K/k} = f, \quad \text{及ビ} \quad e_{K/K_1} = 1 \quad \text{又ハ} \quad e_{K/K_2} = 1$$

ナルコトデアル』

(証明) 充分ナルコトハ (1) 式ノ成立ト $\mathfrak{p}_K /\!/ \pi_K$ ナル π_K ガ O_{K_1} 又ハ O_{K_2} ノ中ニトレルコトヨリ (5) ノ最初ノ等式ヲ得ル。

第二ノ等式ハ一般ニ成立ツ。即:

$$(O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} = (O_{K_1} \cdot O_{K_2}) \cdot O_g$$
$$= (O_{K_1} \cdot O_g) \cdot (O_{K_2} \cdot O_g) = (O_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}} \cdot (O_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}} \quad \cdots\cdots(6)$$

トナル。

必要ナルコトハ (5) ノ Einheit ヲ考ヘレバ (1) ガ成立チ $f = f_{K/k}$ トナル。又最小ノ Bewertung ヲ與ヘル元ヲトレバ, $\mathfrak{p}_K /\!/ \pi_K$ ナル π_K ガ $O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ 中ニモトメラレルコトカラ, [A] ノ (注意) ニヨリ、カヽル π_K ハ O_{K_1} 又ハ O_{K_2} ノ中ニ求メラレネバナラナクナル。故ニ $e_{K/K_1} = 1$ 又ハ $e_{K/K_2} = 1$ ヲ得ル。

(注意) (6) 式ヨリ (3) デ第二等号ノ成立ツコトガワカル。

故ニ (1) ノ最後ノ等式ノ條件トハ何モ関係シナイ。

[C] 『 $O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ …… (7)

ナルタメノ必要充分條件ハ O_K ノスベテノ Primideal $\mathfrak{p}_K$ ニツイテ

$$(O_K)_{\mathfrak{p}_K} = (O_{K_1} \cdot O_{K_2})_{\mathfrak{p}_K} \quad \cdots\cdots(8)$$

ナルコトデアル』

〔証明〕 必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトハ $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_K^{(i)}$ トスレバ

$K \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cong K\mathfrak{p}_K^{(1)} + \cdots\cdots + K\mathfrak{p}_K^{(g)}$ デアルカラ（$\times$, $+$ ハ直積及ビ直和）

$(O_{K_1} \cdot O_{K_2}) \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cong (O_{K_1} \cdot O_{K_2})\mathfrak{p}_K^{(1)} + \cdots\cdots + (O_{K_1} \cdot O_{K_2})\mathfrak{p}_K^{(g)}$

(8) ヨリ $= (O_K)\mathfrak{p}_K^{(1)} + \cdots\cdots + (O_K)\mathfrak{p}_K^{(g)} \cong (O_K) \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ トナリ

E. Noether ノ Modulsatz* ヨリ (ロ) ガ成立スル。

(*E. Noether: Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen; actualités ……, 1934. S. 11. §II. Hilfssatz 及ビ脚註)

〔D〕『$O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ ナルタメノ必要充分條件ハ

$$(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

及ビ $\mathfrak{p}_K / (D_{K_1/k}, D_{K_2/k})$ …… (10)

ナルスベテノ $\mathfrak{p}_K$ ニ對シテ

$$f = f_{K/k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

トナルコトデアル。』

但シ D_{K/K_1} 等ハ K カラ K_1 ヘノ Relativdiskriminant 等ヲ表ハスモノトスル。

〔E〕『$O_K = O_{K_1} \cdot O_{K_2}$ ナルタメノ充分條件ハ

$$(D_{K_1/k}, D_{K_2/k}) = 1 \quad \cdots\cdots (12)$$

ナルコトデアル』

(D, E ノ証明) 〔D〕ハ $\mathfrak{p}_K$ ヲ (10) ナルモノニ限ラズ O_K ノ

スベテノ Primideal ＝ワタルナラバ〔B〕〔C〕ノ直接ノ結果デアル。

(10) 以外ノ p_K デハ (11) ノ成立ツコト，及ビ (12) ヨリ (9) ヲ得ルコトハ

M·Moriya: Über einen Satz von Herbrand 北大理學部紀要 Ser. I. vol. IV. 1936. ヨリワカル。——

〔E〕ハ D·Hilbert: Zahlbericht Satz 88, 及ビソノ拡張。

K: Asano: Zur Diskriminante einer Algebra (數學輯報 Vol. XII, 1935), §2. Satz 6 デアル。

——(終)——