



Title	積分方程式ノ近似解法（Ⅰ）
Author(s)	亀田, 豊治朗
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 111, p. 1-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74427
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

502. 積分方程式ノ近似解法 [I]

亀田 豊治郎 (簡易保険局)

第二種ノ積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt \text{----- (1)}$$

が實際ニ與ヘラレルトキ、其ノ解 $u(x)$ ヲ近似的ニ計算スル方法ヲ述ベル。

根本ノ考ハ核 $K(x, t)$ ノ代リニ、方程式が容易ニ解ケル核 $K_0(x, t)$ ヲトリ且ツ $K_0(x, t) \approx K(x, t)$ ニ充分近クスルコトニ依ツテ (1) ノ解ヲ算出スルノチアルガ、 $K_0(x, t)$ トシテハ例ヘバ x 及ビ t ノ *polynomial* ヲ用キル積分方程式

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_0(x, t) u(t) dt$$

ノ解ガ

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} f(\xi) d\xi$$

ノ形ヲ與ヘラレルコトハ周知ノ事實デアルガ、 $K(x, t)$ が特ニ *Orthogonal functions* $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(t)$ ノ *bilinear function*

$$K_0(x, t) = \sum a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) \quad i = 1, 2, \text{-----} n$$

$$j = 1, 2, \text{-----} n$$

$$a_{ij} = \text{const.}$$

デアル場合 = ハ, $D(x, \xi, \lambda)$ モ亦同様ノ形ノ *bilinear function* デアルコトガ証明出来ル。本論文ノ骨子ハ $D(x, \xi, \lambda)$ ヲ *matrix* デ簡單ニ表ハス所 = アル。(定理 2 参照)

斯クシテ得タ近似解ヲ更ニ精密ニスル方法ハ第三節ニ於テ述ベル。

第一節 *bilinear Kernel*

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ハ區間 (a, b) ニ對シ *normal orthogonal function* デアルトスル。即チ

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_i(t) dt = 1$$

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = 0 \quad i \neq j$$

定義 1. 積分方程式ノ核 $K_0(x, t)$ ガ $\varphi_i(x), \varphi_j(t)$ ノ常數ヲ係數トスル *bilinear function*

$$\sum a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ニ等シイトキ, $K_0(x, t)$ ハ φ_i ノ *bilinear Kernel* デアルト云フ。

定義 2. *bilinear Kernel* ノ *matrix* トハ其ノ係數カテ作ラレタ次ノモノヲ云フ。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

$K_0(x, t)$ が (2) 式で表ハサレル場合ニハ 積分方程
式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K_0(x, t) u(t) dt \quad \text{----- (3)}$$

= (2) ヲ代入スルベ

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_i \sum_j a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) u(t) dt$$

書換フベ

$$u(x) - f(x) - \sum_i \varphi_i(x) \sum_j a_{ij} \int_a^b \varphi_j(t) u(t) dt = 0 \quad \text{----- (4)}$$

(4) ノ両辺ニ $\varphi_i(x)$ ヲ乗ジテ積分スルベ

$$\int_a^b \varphi_i(x) u(x) dx - \int_a^b \varphi_i(x) f(x) dx - \sum_j a_{ij} \int_a^b \varphi_j(t) u(t) dt = 0 \quad \text{----- (5)}$$

$$i = 1, 2, \text{-----} n$$

(4) 及ビ (5) ノ $n+1$ 式カヲ

$$\int_a^b \varphi_i(t) u(t) dt = \int_a^b \varphi_i(x) u(x) dx$$

ヲ消去スルベ次式ヲ得ル。

$$\left| \begin{array}{cccc} u(x) - f(x) & -\sum a_{i1} \varphi_i(x) & -\sum a_{i2} \varphi_i(x) & \text{-----} & -\sum a_{in} \varphi_i(x) \\ -\int_a^b \varphi_1(x) f(x) dx & 1 - a_{11} & -a_{12} & \text{-----} & -a_{1n} \\ -\int_a^b \varphi_2(x) f(x) dx & -a_{21} & 1 - a_{22} & \text{-----} & -a_{2n} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ -\int_a^b \varphi_n(x) f(x) dx & -a_{n1} & -a_{n2} & \text{-----} & 1 - a_{nn} \end{array} \right| = 0 \quad \text{--- (6)}$$

此ノ式ハ $u(x)$ ノ一次方程式ヲアツテ、其ノ係數ハ既知ノ函數デアルカテ一般ニ $u(x)$ ハ之レヨリ求メルコトが出来ル、之ヲ定理ヲ表ハセバ

定理 1. 方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \left(\sum_{i,j} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) \right) u(t) dt$$

ノ解 $u(x)$ ハ (6) 式ヲ満足スル。

方程式 (3) ノ解ハ (6) 式ノ $u(x)$ ノ係數ナル行列式

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}$$

ノ値ガ 0 デアルカナイカニ關スルカラ、之レヲ D ト書キ *bilinear Kernel* (2) ノ *determinant* ト名付ケル。

行列式 D ノ余因子ヲ A'_{ij} ト書ク。

之ヨリ $D \neq 0$ ノ場合ニ方程式 (3) ノ解ヲ簡明ニ表ハスコトヲ述ベル。

(6) 式ノ第二列、第三列、-----第 $n+1$ 列ニ夫々 $-\varphi_1(x)$, $-\varphi_2(x)$, ----- $-\varphi_n(x)$ ヲ乘ジテ第一列カラ減ズルト

$$\left| \begin{array}{cccc}
 u(x) - f(x) + \sum_i \varphi_i(x) \int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi) d\xi & -\varphi_1(x) & -\varphi_2(x) & \cdots -\varphi_n(x) \\
 -\int_a^b \varphi_1(\xi) f(\xi) d\xi & 1-a_{11} & a_{12} & \cdots -a_{1n} \\
 -\int_a^b \varphi_2(\xi) f(\xi) d\xi & -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots -a_{2n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -\int_a^b \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots 1-a_{nn}
 \end{array} \right| = 0 \quad (7)$$

(7) / 左辺ヲ第一列ト第一行トニ依ツテ展開シ Dニテ除スレバ

$$\begin{aligned}
 u(x) &= f(x) - \sum_i \varphi_i(x) \int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi) d\xi \\
 &\quad + \sum_{i,j} \frac{A'_{ji}}{D} \varphi_i(x) \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

之レヲ定理ニ表ハセバ

定理2. 方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) u(t) dt$$

ノ解ハ

$$u(x) = f(x) - \int_a^b \sum_{i,j} a_{ij}^* \varphi_i(x) \varphi_j(\xi) f(\xi) d\xi$$

ノ形ナル、而シテ此ノ式ノ係數ハ

$$a_{ii}^* = 1 - \frac{A'_{ii}}{D}$$

$$a_{ij}^* = -\frac{A'_{ji}}{D} \quad i \neq j$$

デ計算サレル、但シ A'_{ji} ハ行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}$$

ノ第 j 列第 i 行ノ余因子デアール。

(注意) λ ヲ含ンダ方程式ニ對シテハ本定理ノ $D = 0$ ニ於ケル

a_{ij} ノ代リニ λa_{ij} ト書ケバヨイ。

第二節 Matrix 論トノ關係

定理2ハ *matrix*ノ關係式トシテ証明スルコトが出来ル。之レニハ一般ニ二ツノ *bilinear kernel*ト其ノ *matrix*トニ一々對應ガアルコトヲ述べネバナラス。

$K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ ヲ同シ *normal orthogonal function* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ニ對スル *bilinear kernel*トシ (a_{ij}) 及ビ (b_{ij}) ヲ夫々ノ *matrix*トスレバ $K_1(x, t) + K_2(x, t)$ ノ *matrix*ハ $(a_{ij}) + (b_{ij}) =$ 等シイコトハ明カデアール。又 *kernel*

$$\int_a^b K_1(x, \xi) K_2(\xi, t) d\xi$$

ニ對スル *matrix*ハ計算シテ判ル通り $(a_{ij})(b_{ij}) =$ 等シイ。其ノ他 *kernel*ニ常數ヲ乗ズレバ *matrix*ニ其ノ常數ヲ乗セラレルトカ、分配法則ガ兩者共通ニ妥當デアルトカ種々ノ性質ガアル。其ノ内三ツヲ定理ヲ表ハセバ

定理3. $K_1(x, t), K_2(x, t)$ が同様な normal orthogonal function = 對する bilinear kernel トシ
 $(a_{ij}), (b_{ij})$ が夫々の matrix トスレバ

$$\int_a^b K_1(x, \xi) K_2(\xi, t) d\xi, \text{ matrix } \wedge (a_{ij})(b_{ij})$$

= 等シク,

$$K_1(x, t) + K_2(x, t), \text{ matrix } \wedge (a_{ij}) + (b_{ij})$$

= 等シイ。

定理4. $E(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x) g_i(t) + \text{kernel } \wedge$

unit matrix = 對應シ

$$\int_a^b E(x, \xi) K(\xi, t) d\xi = \int_a^b K_0(x, \xi) E(\xi, t) dt$$

$$= K_0(x, t)$$

デアール。

以上ノ定理ヲ用キテ定理2ノ別証ヲ述べル。

先ヅ matrix $(a_{ij}^*), (a_{ij})$ ノ積ヲ計算スル。(E)ヲ
 unit matrix トシ, a'_{ij} ヲ行列式 Dノ原素トスレバ

$$(a_{ij}^*) = (E) - \frac{1}{D} (A'_{ji})$$

$$(a_{kl}) = (E) - (a'_{kl})$$

故ニ

$$(a_{ij}^*)(a_{kl}) = \left((E) - \frac{1}{D} (A'_{ji}) \right) \left((E) - (a'_{kl}) \right)$$

$$= (E) - (a'_{kl}) - \frac{1}{D} (A'_{ji}) + \frac{1}{D} (A'_{ji})(a'_{kl})$$

然 $\nu = (A'_{ji}) =$ 於ケル第 i 列第 j 行ノ原素ハ A'_{ji} デ
 アツテ (a'_{kl}) ノ第 j 列第 i 行ノ原素ノ余因子ニ等シイカラ
 $\text{matrix } (A'_{ji})(a_{kl})$ ハ對角線ガケニ D ヲ殘シテ他ハ
 0 トナル。

故ニ

$$\begin{aligned} (a_{ij}^*)(a_{kl}) &= (E) - (a'_{kl}) - \frac{1}{D} (A'_{ji}) + (E) \\ &= (a_{kl}) + (a_{ij}^*) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

今 (a_{ij}) 及 (a'_{ij}) ヲ matrix トスル核ヲ夫々
 $K_0(x, t), K_0^*(x, t)$ トスレバ定理 (3) = 依リ (8) 式ハ

$$\int_a^b K_0^*(x, \xi) K_0(\xi, t) d\xi = K_0(x, t) + K_0^*(x, t) \dots\dots\dots (9)$$

トナル。即チ $(a_{ij}^*) =$ 對應スル核ハ $(a_{ij}) =$ 對應スル
 核ト相反關係ニアル。從ツテ周知ノ如ク定理 2 ヲ証明シ得
 ル。

尚 $(a_{kl})(a_{ij}^*)$ ヲ同様ニ計算スルニ $(a_{kl}) + (a_{ij}^*)$
 トナル。

以上ヲ得テ結果ヲ述ブレバ

定理 5. a_{ij}^* ヲ定理 2 ノ如ク定義シ $(a_{ij})(a_{ij}^*) =$
 對應スル bilinear kernel ヲ夫々 $K_0(x, t)$ 及 $K_0^*(x, t)$ トスレバ

$$\begin{aligned} (a_{ij}^*)(a_{ij}) &= (a_{ij})(a_{ij}^*) = (a_{ij}) + (a_{ij}^*) \\ \int_a^b K_0^*(x, \xi) K_0(\xi, t) dt &= \int_a^b K(x, \xi) K_0^*(\xi, t) dt \\ &= K(x, t) + K^*(x, t) \\ &\quad \text{--- (ツツク) ---} \end{aligned}$$