



Title	Jacobiノ楕円函数（ $0 < k < 1$ ）ニヨルーニノ簡單ナ寫像
Author(s)	黒田, 稻夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 112, p. 1-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74432
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

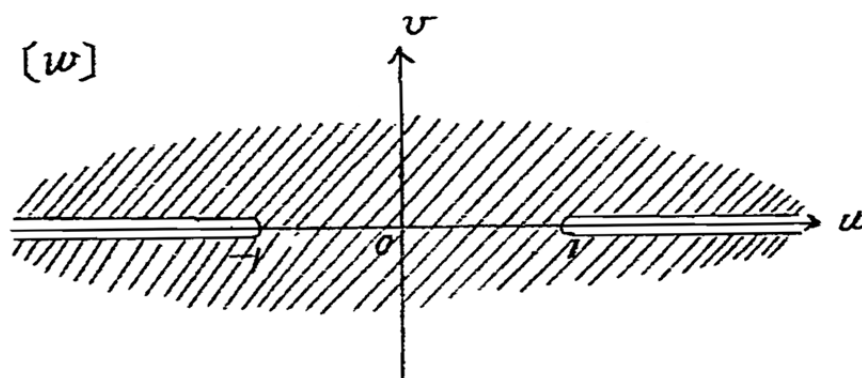
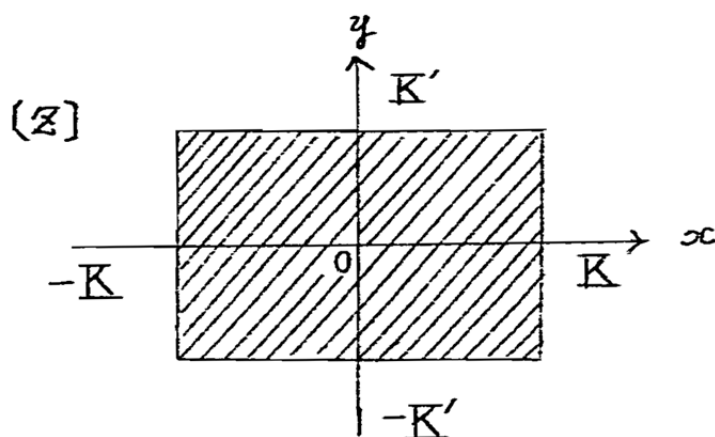
507. Jacobiノ楕円函数($0 < K < 1$)ニヨル ーニノ簡單ナ寫像

黒田 稻夫(山形)

松村勇夫氏ノ御注意有益ニ拝讀致シマシタ。紙上ヲ以テ
深謝イタシマス。

晩秋初冬ノ早イ山形ノ山々ハモウ白衣ヲ纏ヒ始メマシタ。
張替ヘタバカリノ障子ノ格子ヲ眺メナガラ次ノヤウナコトヲ
マツテミマシタ。初期學生ノオ々が楕円函数ノ諸公式ヲ運用
セラレルコトニ幾ラカデモ役立タベ幸甚アリマス。

先ヅ $w = Sn\,z$ ニヨル寫像

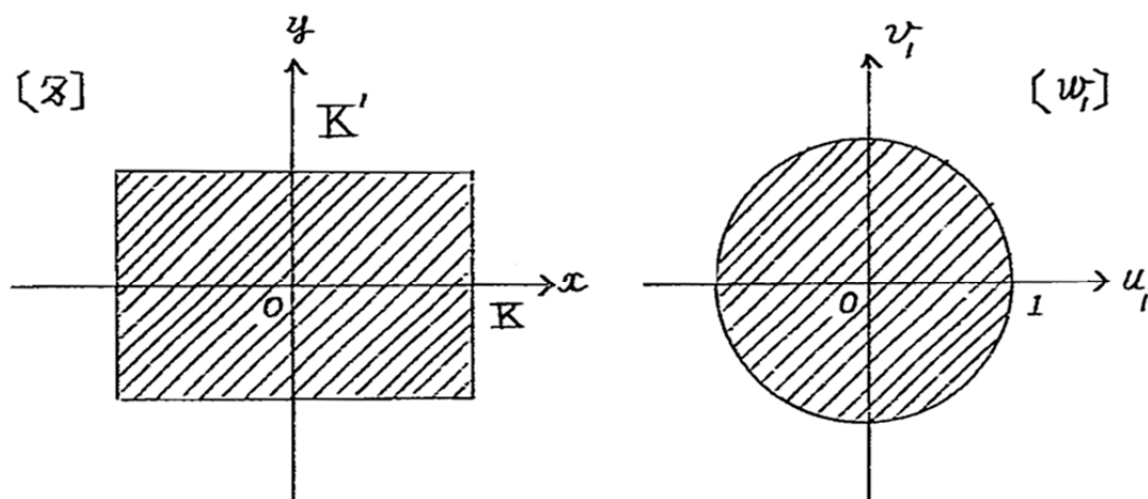


カラ充足致シマス。此ノ切断セラレタ w 平面ハ $w = \frac{2w_1}{1+w_1^2}$
ニヨッテ w_1 平面ノ單位円内ニ寫像セラレマスカラ

$$\operatorname{Sn} \varepsilon = \frac{2w_1}{1+w_1^2}$$

$$\text{或ハ } w_1 = \frac{1 - \operatorname{cn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon} = \frac{\operatorname{sn} \varepsilon}{1 + \operatorname{cn} \varepsilon}$$

ニヨツテ次ノ寫像が得ラレマス。

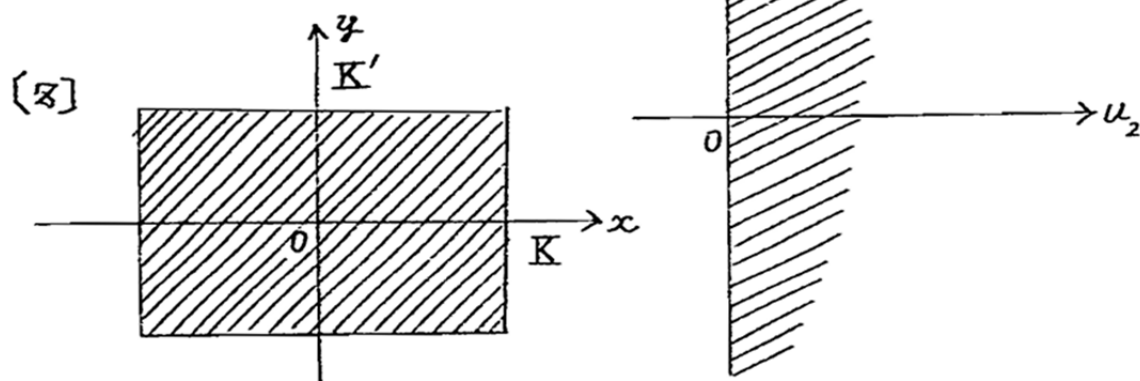


$$(1) \quad w_1 = \frac{\operatorname{sn} \varepsilon}{1 + \operatorname{cn} \varepsilon}$$

更ニ此ノ單位円内ハ $w_2 = \frac{1-w_1}{1+w_1}$ ニヨツテ w_2 平面ノ虚軸ノ右半平面ニ寫像セラレマスカラ

$$w_2 = \frac{1 - \frac{\operatorname{sn} \varepsilon}{1 + \operatorname{cn} \varepsilon}}{1 + \frac{\operatorname{sn} \varepsilon}{1 + \operatorname{cn} \varepsilon}} = \frac{\operatorname{cn} \varepsilon}{1 + \operatorname{sn} \varepsilon}$$

ニヨツテ次ノ寫像が得ラレマス。

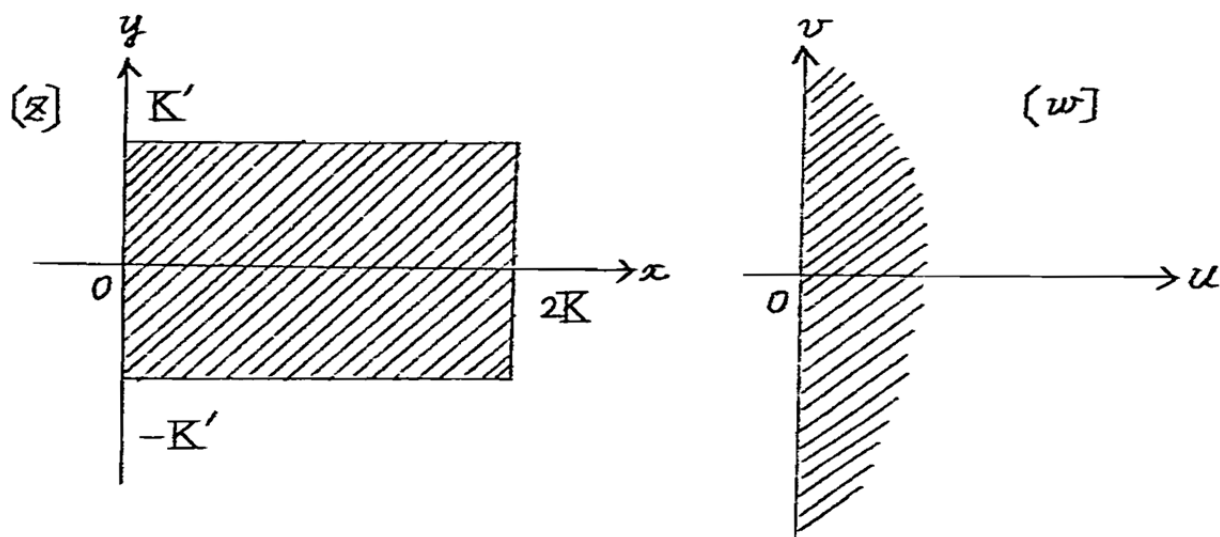


$$(2) \quad w_2 = \frac{cn \, z}{1 + sn \, z}$$

コゝニ於テ $z' = z + K$ ト置イテ z 平面ノ平行移動ヲ行ヒマス ト (2) ハ

$$w_2 = \frac{\frac{K' sn \, z'}{dn \, z'}}{1 - \frac{cn \, z'}{dn \, z'}} = \frac{cn \, z' + dn \, z'}{K' sn \, z'}$$

トナリマスカラ又 $w_2' = \frac{1}{K' w_2}$ ト置キ終ニ w_2' , z' ヲ w , z ト書き改メマス ト次ノ寫像カ得レマス。



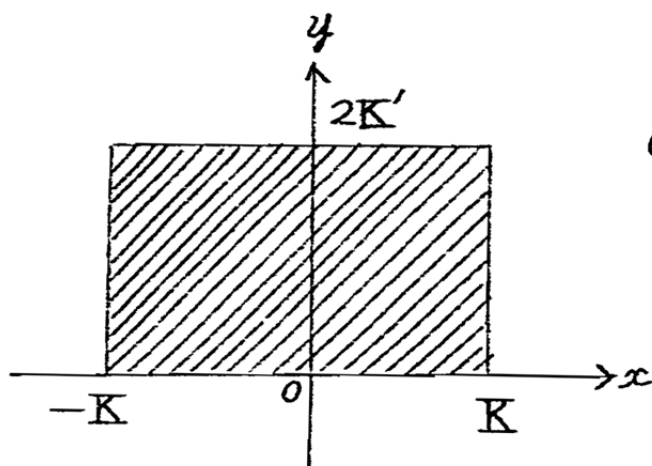
$$(3) \quad w = \frac{sn \, z}{cn \, z + dn \, z}$$

更ニ $z' = iz$, $w' = iw$ ト置イテ z, w 兩平面ノ廻轉ヲ行ヒマス ト (3) ハ

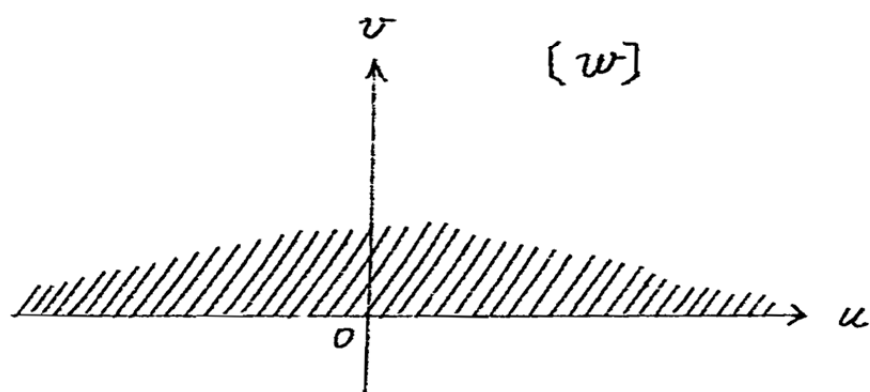
$$-i w' = \frac{-i \frac{sn(z', K')}{cn(z', K')}}{\frac{1}{cn(z', K')} + \frac{dn(z', K')}{cn(z', K')}} = \frac{-i sn(z', K')}{1 + dn(z', K')}$$

トナリマスカラ再ビ w' , z' ヲ w, z ト書き改メ且ツ K' ノ代リニ K ヲ用ヒルコトニシマス ト次ノ寫像カ得レマス。

(z)



$$(4) \quad w = \frac{\operatorname{sn} z}{1 + \operatorname{dn} z}$$

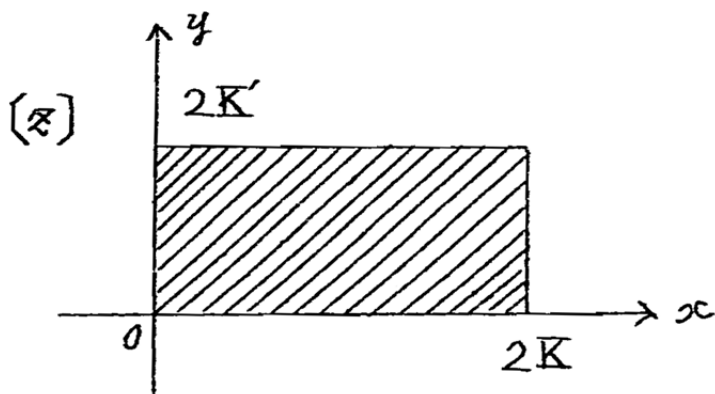


(w)

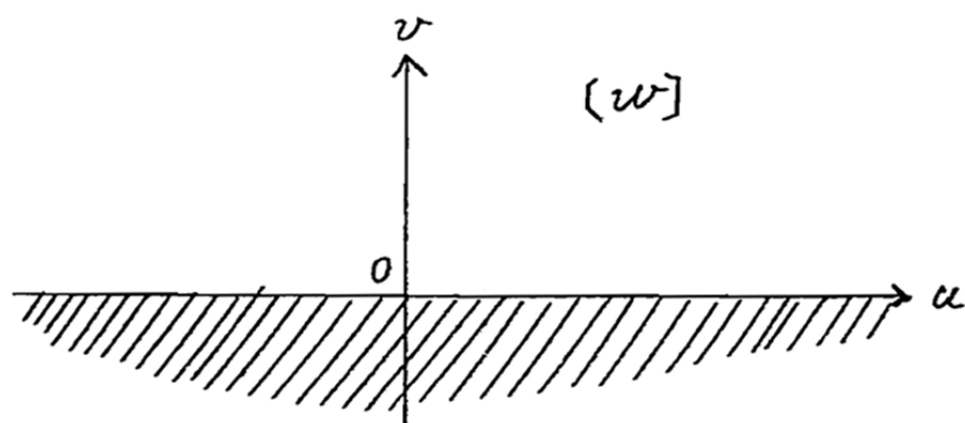
ドウモ基ダシク單調デアリマスが最後ニ今一度 $z' = z + K$,
 $w' = -w$ ト置キマス (4) ハ

$$-w' = \frac{-\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}}{1 + \frac{K'}{\operatorname{dn} z}} = \frac{-\operatorname{cn} z'}{K' + \operatorname{dn} z'}$$

トナリマスカラ又 w' , z' ノ代リニ w , z ト書クト次ノ寫像
 が得ラレマス。



$$(5) \quad w = \frac{\operatorname{cn} z}{K' + \operatorname{dn} z}$$



コンナヤウニシテ幾ラモ sn 名, cn 名, dn 名ノ簡單
ナ結合ト其ノ函数ニヨル寫像ヲ探索スルコトが出来マセウ。

K ノ値ヲ適當ニ選ビマスト縱横ノ比 $\frac{K'}{K}$ ナ隨意ナル矩形
ヲ (1) 乃至 (5) ニヨツテ單位円内又ハ半平面ヘ寫像スルコト
が出来マス。ソコデ K ノ函数 $t = \frac{K'}{K}$ ノ表スベキ曲線ヲ
追踪シテミマス。先ツ第一ニ

$$\frac{dt}{dK} = \frac{\pi}{2K^2 K K'^2} < 0$$

が求メラレマスカラ曲線ハ常ニ下降シ且ツ $K \rightarrow 1$ トキ
 $\frac{dt}{dK} \rightarrow -\infty$ トナリマス。又引続イテ次ノモノが得ラレマ
ス。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{dK^2} &= \frac{\pi \{2E - (1+K^2)K\}}{2K^3 K^2 K'^4} \\ &= \frac{\pi}{2K^3 K^2 K'^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - K^2(1+2\lambda \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - K^2 \lambda \sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 t}{dK^3} = \frac{dt}{dK} \left\{ \frac{(1+K^2)^2}{2K^2 K'^4} + \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 t}{dK^2}}{\frac{dt}{dK}} \right)^2 \right\} < 0$$

ソレ故= $\frac{d^2 t}{dk^2}$ ハ常ニ減少シ $k \leq \frac{1}{3}$ ナラバ $\frac{d^2 t}{dk^2} > 0$,
 $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナラバ $\frac{d^2 t}{dk^2} < 0$ デアリマスカラ曲線ハ $\frac{1}{3} < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$
ナル如キ一ツノ k = 對應スル唯一ツノ 彎曲点ヲ有シマス。

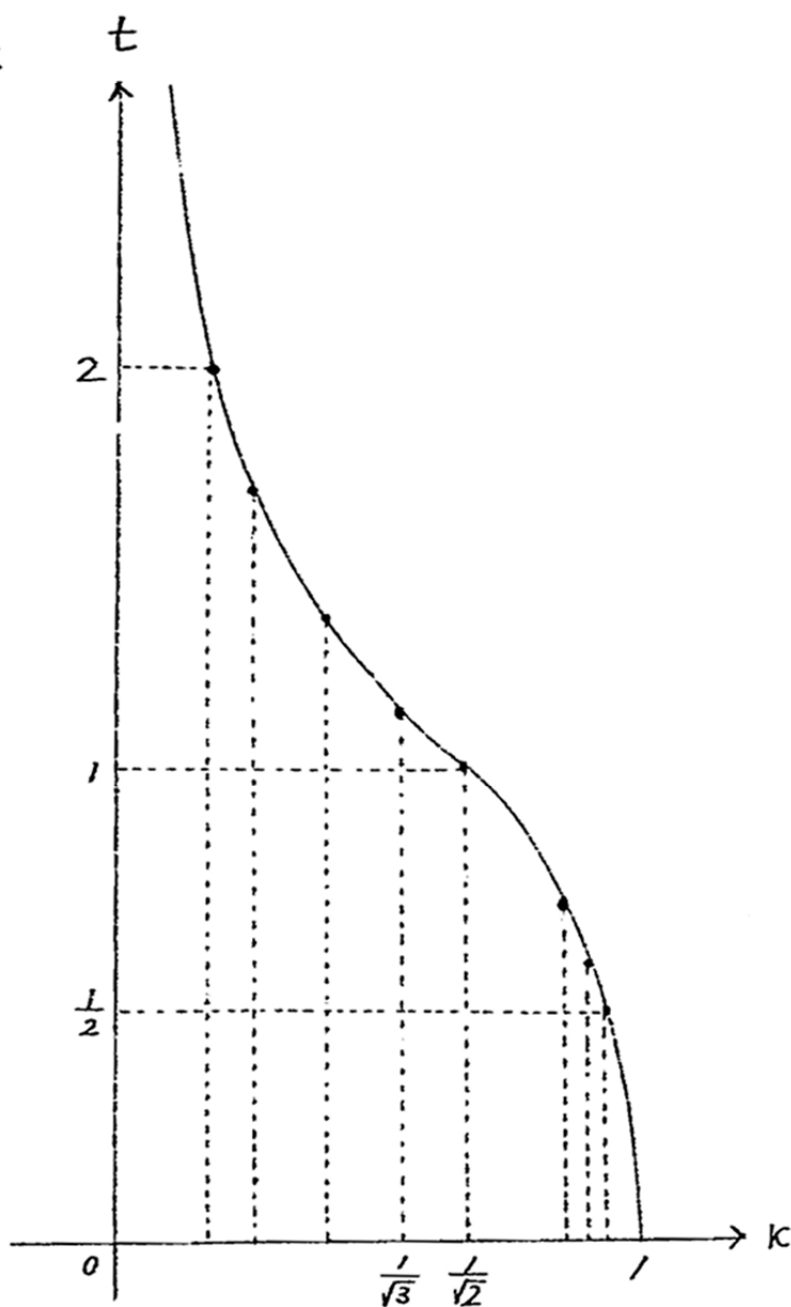
尚關係

k	0	$3-\sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\sqrt{2}-2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{5}{2^4(\sqrt{2}-1)}$	1
t	∞	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	0

ヲ顧慮シテ次ノ曲線

が得ラレマスガ

Cayley 氏, *An elementary treatise on elliptic functions* (1876), p.44
ニ掲載ノモノトハ稍々異ナル結果ニナリマシタ。尤モコンナコトハモウ疾クノ昔ニ解決済ミニテ蛇足ニ過ヤナイノデアリマセウケレドモ私ノ手許ニハ比較シテ見ルモノガ他ニアリマセンノデ一寸當ツテミテ頂キ度ウゴザイ



マス。

昭和 11 年 7 月 — 12 月 分ノ會費金貳円
也ヲ 至急御拂込ミ願ヒマス。

大阪市北区

大阪帝國大學
理學部數學教室

清水 辰次郎

振替口座番號 大阪一七七四三番