



Title	面分ノ脈ニ就イテ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 112, p. 7-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74433
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

508. 面分ノ脈ニ就イテ

寺 阪 英 孝 (阪大)

D ヲ平面上ノ面分, $\dot{D}$ ヲソノ境界トスル。今 D =含マレル円盤 K ヲソノ周 $\dot{K}$ カ $\dot{D}$ ト少クモ二点ヲ共有スルモノヲ D =重内接スル円ト云ヒ、 D ノ凡ユル重内接円ノ中心ノ集合ヲ D ノ脈 (Nerve) —— 葉脈ノマウチ格好ダカラ —— ト云フコト=スル。脈ハ又 $\dot{D}$ ヘノ最短距離ノ点ガ二ツ以上アル如キ D ノ内点ノ集合トモ考ヘラレル。脈ニツイテハ次ノ定理カ得ラレル。

定理一 単一連結ノ面分ノ脈上ノ任意ノ二点ハ、脈ニ含マレル単一連結曲線弧 (Jordanbogen) デ唯一通りニ結び得ル。

以下コノ定理ヲ証明スル。

§1. D =重内接スル円盤 K_1 ノ周 $\dot{K}_1$ ハ $\dot{D}$ =ヨツテニツ以上ノ弧 $a_1, a_2, \dots$ ニ分タレ $D - \overline{K_1}$ ナル開集合ハニツ以上ノ開因子 (即チ面分)ニ分タレテ、 K_1 円ト上記ノ円弧 $a_1, \dots$ ニヨツテ連結サレルカラ、 i 番目ノ a_i ニ由ツテ K_1 トツナガル因子ヲ D_i トスル。

今 D =重内接スル第二ノ円盤 K_2 ($K_2 \neq K_1$)ヲ考ヘル

ト K_2 ハ $D_1, D_2, \dots$ ノ何レカーツト共通点ヲモツカ、
違ツタニツニ同時ニ共通点ヲ持ツコトハナイコトハ、 K_1, K_2
ガ円盤デアアルコトカラ明デアアル。ソコヲ K_2 ト共通点ヲモツ
モノヲ D_1 トスレバ、 K_2 ガ $\dot{D}$ ト切スル点トイフノハ實ハ
 $\dot{D}_1$ (D_1 ノ境界) 上ノ点デアアル。但シコトニ D トカ D_1 トカノ
境界ノ点ト云フノハ D 或ハ D_1 ノ内部カラ境界ニ進ンテノ意
味ノ境界点デ、所謂境界子 (Primende) トシテノ境界点
デアアル。

D ノ境界子ハ D ガ単一連結ダカラ單位円ノ同ノ点ト一
ノ對應ガツケラレテキル譯デアアルカラ、コノ順序ヲ考ヘルト
 $K_1 \cdot \dot{D}$ ト $K_2 \cdot \dot{D}$ トハ $\dot{D}$ ノ境界子トシテ互ニ他ヲ分タナ
イコトナル。

§ 2. 今 D = 重内接スルニツノ円ヲ K_1, K_2 , 中心ヲ

夫々 O_1, O_2 トシ、

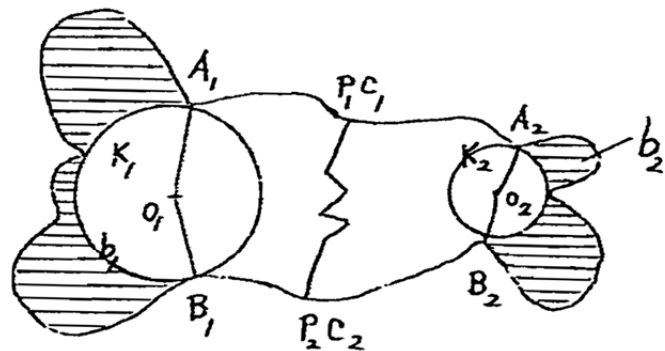
$D - K_1$ ノ開因子ヲ K_2

ト素ナルモノヲ横線

ヲ消シ、又 $D - K_2$

ノ開因子ヲ K_1 ト素

ナルモノヲモ消スト、



残ツタ部分ノ内接 (面分) ヲ D' トスレバ、 D' ハ円弧 $\widehat{A_1B_1} = b_1$,
円弧 $\widehat{A_2B_2} = b_2$ ト $\dot{D}$ ノ境界ノ一部分 $\widehat{A_1A_2} = C_1, \widehat{B_1B_2} = C_2$
ヲカコマレタ単一連結ノ面分ナル。

C_1, C_2 ト半径 $O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2$ デカコマレタ
面分ヲ D'' トシ、コレヲ K_1, K_2 ガ D カラ截取ツタ截片トイ

フコト=スル。

§3. 今 C_1 上ノ点 P_1 ト C_2 上ノ点 P_2 トヲ D'' 内デ折線=ヨリ結び、ソレ=沿フテ動点 P ヲ P_1 カラ P_2 =移動セシメルト距離 $\rho(P, C_1)$, $\rho(P, C_2)$ ハ ρ ノ連続函数ナル故

$$\rho(P_0, C_1) = \rho(P_0, C_2) = r$$

ナル如キ点 P_0 が折線上=存在スル。 P_0 中心, r 半径ノ円ヲ K_0 トスレバ K_0 ハ D =重内接スルコトが云ヘルノデアアル。〔何者、コレ=ハ $K_0 \subset D'$ が云ヘレバヨイ譯デアアルが若シ $K_0 \not\subset D'$ だとスレバ C_1, C_2 ハ K_0 ノ外部=属スルカラ円弧 b_1 又ハ b_2 が K_0 ト共通点ヲモツ筈デ、從ツテ b_1 又ハ b_2 上=一 点 Q が存在シ $|P_0 Q| < r$ トナル。然ラバ線分 $P_0 Q$ 上=ハ C_1, C_2 ノ点ハ存在シナイ。サテ b_1, b_2 ハ D'' ノ外部=属シ、 $P_0 \subset D''$ ナル故 $P_0 Q$ ハ D'' ノ境界ト交ハル譯デアアルが、 C_1, C_2 トハ交ハレナイノダカラ、ドウシテモ半径 $O_1 A_1, O_1 B_1, O_2 A_2, O_2 B_2$ ノドレカト交ハラナケレバナラス。ソウスルト $|P_0 Q|$ ハ $\rho(P_0, b_1)$ 又ハ $\rho(P_0, b_2)$ ヨリ大=ナルワケデ矛盾〕

P_1, P_2 ヲ結ブ折線上=ハ必ず一 点がアルコトが判ツタ。

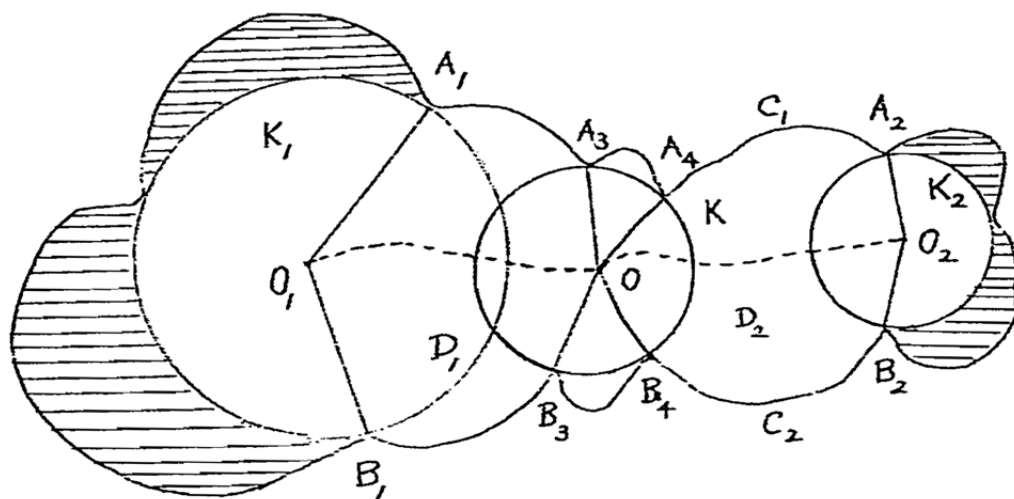
§4. 次=上述ノ如キ C_1, C_2 双方=於テ内接スル円ヲ無數=取レバ、ソノ中心ノ集積点ハ同性質ノ円ノ中心=ナルコトハ明カデアアル。

又カゝル円ハ今ノ証明カラ明ナル如ク D' =属スルカラ、

ソノ中心ハ D' = 属スル。即チ C_1, C_2 双方 = 於テ内接スル D ノ円ノ中心ハ悉ク D' = 属シ、 O_1, O_2 ヲ附加スレバカコル集合 $\overline{O_1 O_2}$ ハ閉集合デアアル。

且ツ O_1, O_2 ノ間ヲ連結デアアルカラ、即チ $\overline{O_1 O_2}$ ハ *continuum*。

§5. 今コノ種ノ円 K (中心ハ O) ヲ考ヘ K_1, K_2 ガ D カヲ截取ル截片ヲ D_1 トスレバ、圖ノ如ク D_1 ハ半径 OA_1, OB_1, OA_3, OB_3 及ビ C_1, C_2 ノ一部 = カコマレタ面分デ、又



K, K_2 ガ D カヲキリ取ル截片ヲ D_2 トスルト、 D_2 ハ半径 $OA_4, OB_4, O_2A_2, O_2B_2$ 及ビ C_1, C_2 ノ一部 = ヨツテカコマレタ面分デアアル。半径 OA_3, OA_4, OB_3, OB_4 上 = ハ O ヲ除キ脈ノ点ハナイコトハ明デアアル。

更ニ C_1, C_2 = 於テ内接スル円 K' ヲ考ヘルト、 $\dot{K}' \cdot \dot{D}$ ハ $\dot{K} \cdot \dot{D}$ = ヨツテ分タレナイ譯故 K' ハ D_1 又ハ D_2 ノ何レカ一方ノ境界 = 重切触シ、從ツテ K' ノ中心 O' ハ D_1, D_2 ノ何レカ一方 = 属スル。即チ $\overline{O_1 O_2}$ ハ O_1, O_2 ナラザルソノ上ノ一点 = ヨツテ左右ニ二分サレル。

以上=ヨリ $\overline{O_1 O_2}$ ハ Jordanbogen デアルコトが結論サレル。

O_1, O_2 フ D 内テ結ブ Jordan 弧 α ハ必ず圖カラモ明カナル如ク上記 OA_3, OA_4, OB_3, OB_4 = 交ハラナケレバナラヌカラ、 α カ脈ノ点カラ成立ツテ居レバ必ず α ハ O フ通過シナケレバナラヌ。即チ脈ノ上デ O_1, O_2 フ結ブ Jordanbogen ハ $\overline{O_1 O_2}$ 以外=ハナイ。

—— (定理一ノ証終リ) ——

§ 6. 重内接ノ円周 $\dot{K}$ ガ $\dot{D}$ =ヨリ $a_1, a_2, \dots$ ナル円弧=分タレルトスレバ、 $a_1, a_2, \dots$ フ弧=スル扇形内ノ各= K ノ中心 O カラ脈が出テキルカラ、 $a_1, a_2, \dots$ ガ三個以上ノ場合 O ハ脈ノ分岐点トナル。

分岐点ノ分岐數ハ高々可附着デアル。分岐点ノ數モ高々可附着ナルコトハ次ノマウ=考ヘレバナル。

平面ノ点ヲ球面 S 上= stereographisch = 寫像スルト D = 重内接スル円 K ノ像 K^* ハ円デアツテ、コレハ D ノ像 D^* = 重内接スル、今 K^* フ含ム平面ヲ K トスレバ $\dot{D}^*$ ハ全ク K ノ片側=アツテ、コレト重切触スル。コノ逆モ云ヘルカラ K ハ $\dot{D}^*$ ノ konvexe Hülle = 重切触ス平面 K ト S トノ交線ノ原像トシテ一般ニ得ラレル。但シ D ノ補集合ノ重内接円ガ同時ニ此ルカ、コレハ分離デキル。脈ノ分岐点ニ對スル $K = \text{ハ}$, $\dot{D}^*$ ノ konvexe Hülle トレッツノ多角形ヲ共有スル切平面 K ガ對應スル故、ソノ數ハ高々可附着デアル。又ツレ以外ノ K = 對シテハ Hülle

ト線分ヲ共有スル切平面 K が對應スルカラ、コノ近傍デ、 K ノ変動ニ對シテ K ノ中心ノ変動ハ線形的、即チ曲線ニハ切線が存在スル。(雜言ヒ方デアルガ) 即チ

定理二 脈上ノ二点 A, B ヲソノ上テ結ブ *Jordan-bogen* $\overline{AB}$ ハ可附番個ノ点 (コレハ脈ノ分岐点トナツテキル) ヲ除キ確定シタ切線ヲ有ス。除外ノ点ニ於テハ片側ツツノ切線ヲ有ス。

脈ハ一般ニ閉集合デハナイ、 $\dot{D}$ が円弧ヲ含ンデキナケレバ末端スラナイ。

§7. 次ノマウナ問題ガ考ヘラレマスガ、興味ヲ持ツレル方ニ解答ヲオ願ヒシマス。

(1) 面分ノ連結数ガ / ヨリ大ナラバ、各境界因子 (*component*) ヲ取りマク *Jordan* 曲線ガ脈ニ含まレル。

(2) 面分ガ *Jordan* 曲線 Γ デカコマレテキル場合、 Γ ノ曲率半径ガ $> \varepsilon > 0$ ナラバ脈ノ末端ヲ附加スルト所謂樹形 (*Baum*) ニナルデアラウ。

(3) Γ ガ必ズシモ曲率ヲモタヌトキニモ、脈ガ樹形ニナルノハ如何ナル場合カ、(例ヘバ Γ ト、凡ベテノ半径 $> \frac{1}{n}$ ナル円トノ交点数ヲ O_n トシタトキ、 O_n ガ各自然数 n ニツキ有限ナラバ脈ハ樹形ニナルデアラウ)

(4) 與ヘラレタ集合ガ脈ニナルタメノ條件如何、

(5) 空間ニ拡張シタナラバ如何。(長廻轉楕円体内デ之ニ重内接スル球ノ中心ハ線分ヲツクル。然ルニ扁平廻轉

楕円体ナラバ円盤トナル。空間ニ於テハ脈々的ニ等質デ
ナイ)