



Title	積分方程式ノ近似解法（Ⅱ）
Author(s)	亀田, 豊治朗
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 112, p. 13-21
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74434
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

509. 積分方程式ノ近似解法(II)

亀田豊治郎(簡易保険局)

第三節 近似解

積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

ヲ近似的ニ解クハ次ノ順序ニヨルコトガ出來ル。

1) 區域 ($a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$)ニ於テ

$|K(x, t) - K_0(x, t)|$ ガ與ヘラレタ數 ε ヨリニ小サイ
bilinear kernel $K_0(x, t)$ ヲ見出ス。

之レハ Fourier seriesデモ出來レバ、又 $K(x, t)$
ヲ Legendre / polynomial デ展開シテモ出來ル。
 $|K(x, t) - K_0(x, t)|$ ガ ε ヨリ小サイト云フ條件ハ區域
ノ一小部分(例ヘバ或ル直線ノ近所)ヲ満足サレナイ場合デ
モ $K(x, t)$ ガ有限ナラバ本方法ニ依ルコトガ出來ル。

2) $K_0(x, t)$ ニ對スル a_{ij} ヲ計算スル。

$$3) \quad D = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

及ビ其ノ餘因子 A'_{ij} ヲ計算スル。

4) 3) テ求メタ A'_{ij} ノ行ト列トヲ入レ替ヘテ

$$(a_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{A'_{11}}{D} & -\frac{A'_{12}}{D} & \cdots \\ -\frac{A'_{21}}{D} & 1 - \frac{A'_{22}}{D} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ヲ算出スル。

$$5) \quad \int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi) d\xi, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

ヲ算出スル。

$$\begin{aligned} 6) \quad u(x) = & f(x) - \left(\sum_j a_{1j}^* \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi) d\xi \right) \varphi_1(x) \\ & - \left(\sum_j a_{2j}^* \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi) d\xi \right) \varphi_2(x) \\ & \cdots \\ & - \left(\sum_j a_{nj}^* \int_a^b \varphi_j(\xi) f(\xi) d\xi \right) \varphi_n(x) \end{aligned}$$

上述ノ方法デーツノ近似解 (u_0 トス) カ得ラレタトキ之ヲ用キテ, 多クノ場合ニ, 更ニ一層眞ニ近い解ヲ得ル方法

かアル。大体ノ考ハ $K-K_0$ ノ絶対値ハ小サイノデアルカラ
 之ニ或ル函数ヲ乗ツタモノヲ *kernel* トスル積分方程式ヲ
 作り u ヲ *successive substitution* ノ方法ヲ收斂ノ速
 ナ級数ニ展開スルノデアルガ、先ハ其ノ計算ヲ *symbolical*
 ニ示セバ次ノ如クアル。

$$u = f + Ku, \quad u_0 = f + K_0 u_0$$

ヨリ

$$u - u_0 = Ku - K_0 u_0$$

$$u_0 (1 - K_0) = u (1 - K)$$

$$u_0 = u \frac{1-K}{1-K_0} = u - \frac{K-K_0}{1-K_0} u$$

然ルニ (9) 式ヨリ

$$(1-K_0)(1-K_0^*) = 1$$

デアルカラ

$$u = u_0 + (1-K_0^*)(K-K_0)u$$

今 $(1-K_0^*)(K-K_0)$ = 相當スル *kernel* ヲ K_1 ト書ケバ

K_1 ノ絶対値ハ多クノ場合小サイノデアルカラ

$$u = u_0 + K_1 u_0 + K_1^2 u_0 + \dots$$

ト云フ收斂ノ速イ級数ヲ求めラレル。

之レヨリ 正式ニ上記ノ核 K_1 ヲ求めル。

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (1)$$

$$\text{ヨリ} \quad u_0(x) = f(x) + \int_a^b K_0(x, t) u_0(t) dt \quad (10)$$

ヲ辺々相減スレバ

$$u(x) - u_0(x) = \int_a^b K(x, t) u(t) dt - \int_a^b K_0(x, t) u_0(t) dt \quad (11)$$

(11)ノ x ノ代リ $= \xi$ ト書キ $K_0^*(x, \xi)$ ヲ乘ツテ ξ ニ就キ積分スレバ

$$\begin{aligned} & \int_a^b K_0^*(x, \xi) u(\xi) d\xi - \int_a^b K_0^*(x, \xi) u_0(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b \int_a^b K_0^*(x, \xi) K(\xi, t) u(t) d\xi dt \\ & \quad - \int_a^b \int_a^b K_0^*(x, \xi) K_0(\xi, t) u_0(t) d\xi dt \quad (12) \end{aligned}$$

サテ(9)式ノ両辺 $= u(t) - u_0(t)$ ヲ乘ツテ $=$ ツキ積分スレバ

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b K_0^*(x, \xi) K_0(\xi, t) u(t) d\xi dt - \int_a^b \int_a^b K_0^*(x, \xi) K_0(\xi, t) u_0(t) d\xi dt \\ &= \int_a^b K_0(x, t) u(t) dt - \int_a^b K_0(x, t) u_0(t) dt \\ & \quad + \int_a^b K_0^*(x, t) u(t) dt - \int_a^b K_0^*(x, t) u_0(t) dt \quad (13) \end{aligned}$$

(12) $=$ (13)ヲ加ヘタルモノヲ(11)ヨリ減シテ変化スレバ

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \int_a^b [K(x, t) - K_0(x, t)] u(t) dt \\ & \quad - \int_a^b \int_a^b K_0^*(x, \xi) [K(\xi, t) - K_0(\xi, t)] u(t) d\xi dt \quad (14) \end{aligned}$$

ヲ得ル、故ニ

$$K_1(x, t) = K(x, t) - K_0(x, t) - \int_a^b K_0^*(x, \xi) [K(\xi, t) - K_0(\xi, t)] d\xi \quad (15)$$

之ヲ定理デ表ハセバ

定理 6. 積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K_0(x, t) u(t) dt$$

ノ解ヲ u_0 トスレバ積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

ノ解ハ次ノ方程式ヲ満足スル。

$$u(x) = u_0(x) + \int_a^b K_1(x, t) u(t) dt$$

但シ

$$K_1(x, t) = K(x, t) - K_0(x, t) - \int_a^b K_0^*(x, \xi) (K(\xi, t) - K_0(\xi, t)) d\xi$$

デアツテ、 $K^*(x, t)$ ハ $K_0(x, t)$ ノ *reciprocal kernel* デアル。

(注意) 本定理ノ証明ニハ $K_0(x, t)$ が *bilinear kernel* デアルコトヲ用キテ居ナイカラ、任意ノ近似核デヨイ。故ニ *Volterra* ノ方程式ガ $|K - K_0|$ が小サイ場合ニハ K_0 ノ *reciprocal kernel* K_0^* ガ判ツテ居リ且ツ之ガ大キクナイナラバ本定理ニヨリ速ニ収斂スル級数ガ解ヲ計算スルコトガ出来ル。

第四節 計算

本節ニハ計算例ト計算ニ必要ナ資料トヲ掲ゲル。

1. $n=1$ の場合、即ち

$$u(x) = f(x) + \int_a^b a_{11} \varphi_1(x) \varphi_1(t) dt$$

ノ解ハ (6) 式ニヨリ

$$u(x) = f(x) + \frac{a_{11}}{1-a_{11}} \varphi_1(x) \int_a^b \varphi_1(t) f(t) dt$$

デアール。

2. $n=2$ の場合ニ於ケル

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{ij} a_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(t) dt$$

ノ解ハ定理 2 ヨリ

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{ij} a_{ij}^* \varphi_i(x) \varphi_j(t) dt$$

デアールガ a_{ij}^* ノ値ハ

$$(a_{ij}^*) = \begin{pmatrix} \lambda \frac{-a_{11} + \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{D(\lambda)} & \lambda \frac{a_{12}}{D(\lambda)} \\ \lambda \frac{a_{21}}{D(\lambda)} & \lambda \frac{-a_{22} + \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{D(\lambda)} \end{pmatrix}$$

但シ $D(\lambda) = 1 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ デアル。

3. *polynomial* ノ核ニヨリ近似解ヲ算出スル場合ニハ先ツ変数ヲ適當ニ変更シテ限界 a, b ガ夫々 $-1, 1$ トナルヲニシ、然ル後 *normalized Legendre's polynomial* ノ核ヲ表ハス場合が多イト思ハレルカラ、此ノ

場合、式ヲ下ニ掲ケル。

Legendre's polynomial	normal orthogonal function	$x^n \Rightarrow \varphi_i(x) = \text{ヲ表ハセルモノ}$
$P_0(x) = 1$	$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 = \sqrt{2} \varphi_1(x)$
$P_1(x) = x$	$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$	$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi_2(x)$
$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} P_2(x)$	$x^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \varphi_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi_1(x)$
$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} P_3(x)$	$x^3 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{7}} \varphi_4(x) + \frac{\sqrt{6}}{5} \varphi_2(x)$
$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$	$\varphi_5(x) = \sqrt{\frac{9}{2}} P_4(x)$	$x^4 = \frac{8}{35} \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi_5(x) + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{2}{5}} \varphi_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{5} \varphi_1(x)$

4. 計算例トシテ定理2ニヨリ次ノ方程式ヲ解ク。

$$u(x) = 1 + \int_{-1}^x \cos xt \, u(t) \, dt$$

$$K_0(x, t) \text{ トシテ } 1 - \frac{x^2 t^2}{2} + \frac{x^4 t^4}{24} \text{ ヲ取レバ}$$

$$|K - K_0| < \frac{1}{720}$$

デアールカラ定理2ノミデモ相當精密ナ近似解ガ得ラレル。

$K_0(x, t)$ ハ前掲ノ $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ デ表ハスコトガ出來ル、
其ノ係數 a_{ij} 及ビ之レヨリ計算シタ諸數ヲ表示スレバ次ノ
通りデアアル。

	a_{ij}			a'_{ij}			A'_{ij}		
$i \backslash j$	1	3	5	1	3	5	1	3	5
1	1.892222	-.095122	.001270	.892222	.095122	-.001270	1.082920	-.095074	.001222
3	-.095122	1.083447	.001623	.095122	1.083447	-.001623	-.095074	1.891792	-.001569
5	.001270	.001623	1.000484	-.001270	-.001623	.999516	.001222	-.001569	1.995723

而シテ $D = |a'_{ij}| = -.975251$

アルカラ, $\frac{A'_{ij}}{D}$ 及ビ a_{ij}^* ハ次表ノ通りアル。

	$\frac{A'_{ij}}{D}$			a_{ij}^*		
$i \backslash j$	1	3	5	1	3	5
1	-1.110401	.097487	-.001253	2.110401	-.097487	.001253
3	.097487	.914423	.001609	-.097487	.085577	-.001609
5	-.001253	.001609	1.000484	.001253	-.001609	-.000484

故ニ

$$u_0(x) = f(x) - \int_{-1}^1 \sum_{ij} \tilde{a}_{ij}^* g_i(x) g_j(t) f dt$$

$$= 1 - \int_{-1}^1 (2.110401 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) dt$$

$$- \int_{-1}^1 (-.097487) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) dt$$

$$- \int_{-1}^1 .001253 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \left(\frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8} \right) dt$$

$$= -1.221 + .341x^2 - .016x^4$$

デアル。