



Title	河田氏ノ論文, 其ノ他
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 113, p. 17-23
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74439
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

514. 河田氏ノ論文, 其ノ他

浅野 啓 三 (阪大)

本紙 109号 = 於テ河田君ハニツノ有限次代数体ノ
Kompositum, *Hauptordnung* が各々ノ *Haupt-*
ordnung, *Kompositum* = ナルタメノ 必要條件
ヲ論ゼラレタ、ソレハ *im Kleinen* = 於テ條件ヲ求メ
im Grossen = 得ルノデアアル。 *im Grossen* ナ条件
ヲ云ヒ表ハス場合 *Relativdiskriminante* が使
用サレテキルガ、ソレハ *Relativedifferente* = スベキ
デアアル。 *Relativdiskriminante* ヲ用キタノデハ必
要條件ガウマク表ハシ得ナイヤウ = 思ハレル、又 *im Klei-*
nen ナ条件ヲ出ス場合ノ証明 (上記論文 [B], 必要條件ノ
証明) = 於テハ、今少シ p -*adischer Zahlkörper*ノ
構造ニ立入ツテ考察スル必要ガアリ、アル様 = *elementar*
ニハ証明ガ完成シナイデアロウト思ハレル、河田君ノ最後ノ

結果ハ Discriminante $\neq$ Differente = 直セ、ヨイ。

次 = 補正、意味ヲ一應証明ヲ試ミル。

定理. K $\mathfrak{f}$ -adischer Zahlkörper, K_1, K_2 $\mathfrak{f}$ の Unterkörper トシ, $K = K_1 K_2$, $k = K_1 \cap K_2$ トスル。 K, K_1, K_2 の Hauptordnung $\mathfrak{o}$ 夫々 $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ トスルトキ $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \cdot \mathfrak{o}_2$ トナルヲ必要且ツ充分ノ條件ハ K/k , 又ハ K/K_2 が unverzweigt $\neq$ 且ツ $f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$ トナルコトデアル。 $\mathfrak{f} = f, f_1, f_2$ ハ夫々 $K/k, K_1/k, K_2/k$ の Restklassengrad トスル。

証明: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \cdot \mathfrak{o}_2$ トスル。 $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ の Primideal $\mathfrak{f} = (\pi), \mathfrak{f}_1 = (\pi_1), \mathfrak{f}_2 = (\pi_2)$ トスルハ

$$\mathfrak{o}/\mathfrak{f} = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_2 / \mathfrak{f} = (\mathfrak{o}_1/\mathfrak{f}_1)(\mathfrak{o}_2/\mathfrak{f}_2)$$

コレカラ $f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$ $\mathfrak{f}$ 得ル、次 = K_1, K_2 の Trägheits-

körper $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ トスルハ $K_1 = \mathfrak{w}_1(\pi_1)$, $K_2 = \mathfrak{w}_2(\pi_2)$, $\mathfrak{w}_1/k, \mathfrak{w}_2/k$ ハ unverzweigt, zyklisch $\neq$ Restklassengrad ハ夫々 $f_1, f_2 = \mathfrak{f}$ 等シイ。 $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_2$ カラ

$$\pi = \sum_i \alpha_i \beta_i \quad \alpha_i \in \mathfrak{o}_1, \beta_i \in \mathfrak{o}_2$$

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i_0}(\pi_1), \quad \beta_i \equiv \beta_{i_0}(\pi_2)$$

$\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}$ ハ夫々 $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ の ganzes Element.

$$(\pi_1) = (\pi^{e_1}), \quad \pi_2 = (\pi^{e_2}), \quad e' = \text{Min}(e_1, e_2) > 1$$

トスレバ

$$\pi \equiv \sum_i \alpha_{i_0} \beta_{i_0} \pmod{(\pi^{e'})}, \quad \sum_i \alpha_{i_0} \beta_{i_0} \equiv 0 \pmod{(\pi)}$$

$\sum_i \alpha_{i_0} \beta_{i_0} \in W_1 W_2 \Rightarrow W_1 W_2 / k$ は unverzweigt ナ
ルカラ

$$\sum_i \alpha_{i_0} \beta_{i_0} \equiv 0 \pmod{(\pi^e)}$$

e は K/k の Verzweigungsordnung ナ $e \geq e'$.

故ニ

$$\pi \equiv \sum_i \alpha_{i_0} \beta_{i_0} \equiv 0 \pmod{(\pi^{e'})} \quad e' > 1.$$

従ツテ $e' = 1$ ナレバナリ。即チ K/k 又ハ K/K_2 は unverzweigt.

$$\text{逆} = e' = 1, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \quad \text{トスレバ} \quad O/f = (O_1/f_1) \cdot (O_2/f_2)$$

が成立シテ、Primelement π が O_1 又ハ O_2 中ニ
トレル。

此ノコトカラ $O = O_1 \cdot O_2$ ナ得ル。(証明終リ)

次ニ im Grossen ナ移ル。今度ハ K ナ endlicher
algebraischer Zahlkörper, K_1, K_2 ナ K の
Unterkörper トシ $K = K_1 K_2$, $k = K_1 \cap K_2$ トスル。
 K, K_1, K_2, k の Hauptordnung ナ夫々 O, O_1, O_2, o
トシ O の Primideal ナ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ ナ割レル O_1, O_2, o の
Primideal ナ夫々 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ ナ表ハス。又 $f_{\mathfrak{p}},$
 $f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2}$ ナ以テ $K/k, K_1/k, K_2/k$ の $\mathfrak{p}$ -grad ナ
示ス。

定理: $O = O_1, O_2$ トナルタメ必要且ツ充分ナ條件ハ

$$(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1, \quad \mathfrak{p} / \frac{D_{K/K}}{D_{K/K_1} D_{K/K_2}} \text{ ナル } \mathfrak{p} = \text{関シテ}$$

$$f_{\mathfrak{p}} = \frac{f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})} \quad (*) \quad \text{トナルコトデアル。コノ} = D_{K/K} \text{ 等ハ } K/K$$

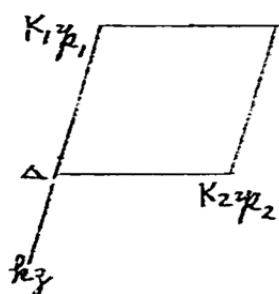
ノ Differentiale トスル。

証明: $O = O_1, O_2$ トスル。 $\mathfrak{p}$ $\neq O$ ノ任意ノ Primideal トシ $\mathfrak{p}$ -adisch = 移ル。 $K_{\mathfrak{p}} = K_1 \mathfrak{p}_1 \cdot K_2 \mathfrak{p}_2$, $O_{\mathfrak{p}} = (O_1, O_2)_{\mathfrak{p}} = O_1 \mathfrak{p}_1, O_2 \mathfrak{p}_2$. $O_{\mathfrak{p}}$ 等ハ O ノ $\mathfrak{p}$ -adische Grenzmenge トスル。

$$(*) \quad \frac{D_{K/K}}{D_{K/K_1} D_{K/K_2}} \text{ ノ Primteiler} = \text{ナラナイ } \mathfrak{p} = \text{ツイテハ次} \\ = \text{示ス様} = f_{\mathfrak{p}} = \frac{f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})} \text{ ノ 成立スルコトガ証明サレル。}$$

Primteiler = ナル $\mathfrak{p}$ = ツイテハ 不明デアルカラ条件ノ中 =
入レテオクワケデアル。 $D_{K/K}, D_{K_1/K} = D_{K/K_2} D_{K_2/K} = D_{K/K}$, $(D_{K_1/K}, D_{K_2/K}) = 1$ カラ $\frac{D_{K/K}}{D_{K/K_1} D_{K/K_2}} = (D_{K_1/K}, D_{K_2/K})$ $\mathfrak{p}$ ガ Teiler ナ

ナイトスレバ $\mathfrak{p}_1$ 又ハ $\mathfrak{p}_2$ ハ über k unverzweigt デアル。 $\mathfrak{p}$ -adisch
デ考ヘルト $K_1 \mathfrak{p}_1 / k_3$ 又ハ $K_2 \mathfrak{p}_2 / k_3$ ガ unverzweigt, zyklisch.
今前者ガ unverzweigt スル $K_{\mathfrak{p}} / K_2 \mathfrak{p}_2$ ハ勿論 unverzweigt



デアルカラ $K_{\mathfrak{p}}, K_1 \mathfrak{p}_1, K_2 \mathfrak{p}_2$ ノ k_3 上ノ
Verzweigungsordnung $\mathfrak{p}$ 夫々 $e_{\mathfrak{p}}, e_{\mathfrak{p}_1},$
 $e_{\mathfrak{p}_2}$ トスレバ $e_{\mathfrak{p}} = e_{\mathfrak{p}_2}, e_{\mathfrak{p}_1} = 1$.

$$e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} = (K_{\mathfrak{p}} : k_3) = (K_{\mathfrak{p}} : K_2 \mathfrak{p}_2)(K_2 \mathfrak{p}_2 : k_3) \\ = (K_1 \mathfrak{p}_1 : \Delta) e_{\mathfrak{p}_2} f_{\mathfrak{p}_2}$$

$\Delta = K_1 \mathfrak{p}_1 \cap K_2 \mathfrak{p}_2$. Δ ハ k_3 上デ unverzweigt デアリ $K_1 \mathfrak{p}_1 = W_1$
ト $K_2 \mathfrak{p}_2$ ノ Trägheitskörper W_2 トノ Durchschnitt = ナルカラ
 $(\Delta : k_3) = (f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})$

$$\text{故} = f_{\mathfrak{p}} = (K_1 \mathfrak{p}_1 : \Delta) f_{\mathfrak{p}_2} = \frac{(K_1 \mathfrak{p}_1 : k_3) f_{\mathfrak{p}_2}}{(\Delta : k_3)} = \frac{f_{\mathfrak{p}_1} f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})}$$

$O_{\mathbb{Z}}, O_{\mathbb{Z}_1}, O_{\mathbb{Z}_2}$ ハ夫々 $K_{\mathbb{Z}}, K_{\mathbb{Z}_1}, K_{\mathbb{Z}_2}$, Haupt-
ordnung = ナルカラ前定理 = ヨリ $K_{\mathbb{Z}}/K_{\mathbb{Z}_1}$, 又ハ $K_{\mathbb{Z}}/K_{\mathbb{Z}_2}$

ノ何レカハ unverzweigt. $f_{\mathbb{Z}} = \frac{f_{\mathbb{Z}_1} f_{\mathbb{Z}_2}}{(f_{\mathbb{Z}_1}, f_{\mathbb{Z}_2})}$. $\mathbb{Z}$ ハ任

意カカラ $(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1$.

逆 = 定理ノ條件ガ成立スルモノトスル . 各々 , $\mathbb{Z}$ = ツ
イテ $K_{\mathbb{Z}}/K_{\mathbb{Z}_1}$, 又ハ $K_{\mathbb{Z}}/K_{\mathbb{Z}_2}$ ハ unverzweigt デア

リ . 且ツ $f_{\mathbb{Z}} = \frac{f_{\mathbb{Z}_1} f_{\mathbb{Z}_2}}{(f_{\mathbb{Z}_1}, f_{\mathbb{Z}_2})}$ ガ成立スル $\frac{D_{K/\mathbb{Z}}}{D_{K/K_1} D_{K/K_2}}$,

Primteiler = ツイテハ假定シテアルシ . Primteiler
= ナラナイモノ = ツイテハ此ノ關係ガ成立スルコトガ証明出
來ルカラ前定理 = ヨリ $O_{\mathbb{Z}} = O_{\mathbb{Z}_1}, O_{\mathbb{Z}_2} = (O_{\mathbb{Z}_1}, O_{\mathbb{Z}_2})_{\mathbb{Z}}$. コレ
ガスベテノ $\mathbb{Z}$ = ツイテ成立スルカラ im Großen = 於
テモ $O = O_{\mathbb{Z}_1} \cdot O_{\mathbb{Z}_2}$. (証明終リ)

次 = 問題ハ少シ違フガ、 $\mathcal{O}$ ヲ代数体 k , 有限次拡大
体トシ $\mathcal{O}$ ヲ k , 上ノ einfache Algebra ト見ナシ .
Körper k ヲ K マデ拡大スルトキ $\mathcal{O}_K = \mathcal{O} \times K$ ハ一様 =
ハ halbeinfach = ナル , デアルガ、ソノ Maximal-
ordnung $\mathcal{O}$ ガ $\mathcal{O}_{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{\mathcal{O}} \cdot \mathcal{O}_K$ トナルタメノ條件
如何ヲ考ヘル .

$\mathcal{O}_{\mathcal{O}}, \mathcal{O}_K$ ハ夫々 $\mathcal{O}, K$ ノ Hauptordnung デアル . (前
述ノ場合デ K_1, K_2 , Kompositum ガ k , 上ノ direktes
Produkt = ナル場合、例ヘバ K_1, K_2 ノ少クトモ一方ガ

galaisch = ナルヲナ場合ガコレニ含マレルヲケデアル)
此ノ場合ニハ結果ハ簡單デ次ノ定理ヲ得ル。

定理: $\sigma = \sigma_{\alpha} \cdot \sigma_K$ トナルタメノ必要且ツ充分ノ条件
ハ, $(\sigma_{\alpha}, \sigma_K) = 1$. $\sigma_{\alpha}, \sigma_K$ ハ夫々 $\alpha/k, K/k$,
Relativdiskriminante テアル。

証明: $\sigma = \sigma_{\alpha} \cdot \sigma_K$ トスル。 σ_{α} ガ k , Haupt-
ordnung σ = 對シテ Minimalbasis $w_1, \dots, w_n$
ヲ有スルナラバ、ソレハ σ ノ σ_K = 關スル Minimalbasis
ニナル。 $\alpha \in \alpha$ トスレバ

$S(\alpha) = S_{\alpha/k}(\alpha) = S_{\alpha_K/K}(\alpha)$ (reguläre
Darstellung, Spur)

$w_1, \dots, w_n$, komplementäre Basis

$$(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) = (w_1, \dots, w_n) (S(w_i w_j))^{-1}$$

ハ α/k 及 α_K/K , Differente , 逆 Ideal ,
Minimalbasis ヲ作ルカラ

$$D_{\alpha_K/K} = D_{\alpha/k} \cdot \sigma_K$$

$$\text{同様} = D_{\alpha_K/\alpha} = D_{K/k} \cdot \sigma_{\alpha}.$$

σ_{α} ガ σ = 關スル Minimalbasis ヲモタナイトヤデモ,
 k , ganzes Ideal m ヲ適當ニトツテ (例ヘバ α_K/k
 , Diskriminantenprimteiler ヲスベテ含ムヤウ
ノ Ideal) zu m ganz ナ数ヲ考察スレバマハリ上ノ
結果ヲ得ル。

$\wp$ ヲ σ , 任意ノ Primideal トシ、 $\wp$ -adisch
ニ移リ、對應スル $\wp$ -adische Grenzmenge ヲ $\bar{\alpha}_K$,

$\overline{\alpha}, \overline{K}$, 等ヲ示ス、コレヲハ皆 Körper = ナル。^(*)

$$\overline{\alpha_K} = \overline{\alpha} \cdot \overline{K}, \quad \overline{\sigma} = \overline{\sigma_\alpha} \cdot \overline{\sigma_K}$$

テ $\overline{\sigma}, \overline{\sigma_\alpha}, \overline{\sigma_K}$ ハ夫々 $\overline{\alpha_K}, \overline{\alpha}, \overline{K}$, Hauptordnung
= ナルカラ $\overline{\alpha_K}/\overline{\alpha}$ スハ $\overline{\alpha_K}/\overline{K}$, 何レカハ unverzweigt.
即チ α_K ノ中デ考ヘテ

$$(D_{\alpha_K/K}, D_{\alpha_K/\alpha}) = (D_{\alpha/K} \cdot \sigma_K, D_{K/\alpha} \cdot \sigma_\alpha) = 1$$

Λテ Kヲ含ム kノ上, galois 体トシ α_K , 中 = ein-
betten シテ考ヘルコト = スレバ、此ノ中デ

$$(D_{\alpha/K}, D_{K/k}) = 1$$

Kヲソノ konjugierter Körper $K^{(v)}$ = 概ス. Λ/k
ノ Automorphismus (ソレハ α_K , Automorphis-
mus ヲ定義スル) ヲ行ツテ考ヘルト $\alpha_K^{(v)}$, Maximal-
ordnungハ $\sigma_\alpha \cdot \sigma_K^{(v)}$ = ナリ,

$$(D_{\alpha/K}, D_{K^{(v)}/k}) = 1$$

$$\mathcal{I}_{K/k} = \prod_v D_{K^{(v)}/k} \text{ テアルカラ}$$

$$(D_{\alpha/K}, \mathcal{I}_{K/k}) = 1$$

故 =

$$(\mathcal{I}_{\alpha/K}, \mathcal{I}_{K/k}) = 1$$

此ノ條件ガ充ルコトノ証明ハ formal + Diskrimi-
nante = 関スル計算カラ容易 = 得ラレル。

(*) Deuring, algebren, S. 98