



Title	線状函數方程式ニ就イテ（Ⅰ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 114, p. 1-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74442
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

517. 線状函数方程式ニ就イテ(I)

北 川 敏 男 (阪大)

1. 以下、本誌 108号 493番 (以後コノ論文ヲ〔展Ⅱ〕デ表ハス) デ述ベタ函数展開ノ一形式ヲ基礎ニシテ、或ル種ノ線状函数方程式ヲ論ツタイト思フ。

尚以下述バルコトニ於イテ線状移動可能函数方程式論ノ諸結果ハ其レノ特殊ノ場合トシテ含マシメタイ。〔展Ⅰ〕ニ於ケル記号及ビ規約等ハコノデモ假定シテ進ム。

2. 今、Operation linéaire I' ノ domain 並ニ range ヲ $d(I')$, $r(I')$ デ表ハシ、コレヲハ (A) ノ部分集合ヲトスル。 $f \in (B)$, $d'f \in d(I')$, $f \in d(I')$, 且ツ $I'f \in (B)$ トルトキニハ、

$$(2.1) \quad I'd'f = d'I'f$$

デアルトスル。カナル Operation I' ニ附随シタ二種類ノ函数方程式

$$(I) \quad I'f(x) = 0 \quad (x \in X)$$

$$(II) \quad I'f(x) = g(x)$$

(但シ、 $g(x) \in r(I')$ トシテ) 解 $f(x)$ ヲ $d(I') =$ 於テ求メル問題ヲ考ヘル。

(I)ニ関シテハ、カナル解ヲ $\{f_{\lambda, \epsilon}(x)\}$ $\lambda \in \mathcal{M}$

カラ適當ニツクツタ級数ニ展開スルコトニヨリ、解ノ諸性質ヲ見セシトシ、(II)ニ関シテハ、定差法ニ於ケルガ如キ主解ガ問題ノ核心ヲトスルコトニナル。

3. 展開 = 関スル基本事項

定理1. $\mathcal{D} =$ 属スルスベチノ $\lambda =$ 関シテ

$$(3.1) \quad j_{\lambda}(x) \in d(I), \quad I' j_{\lambda}(x) \in (B)$$

ナリトスレバ

$$(3.2) \quad I' j_{\lambda}(x) = G(\lambda) j_{\lambda}(x)$$

ナル如キ $\mathcal{D}$ デ定義サレタ函数 $G(\lambda)$ が存在スル。

証明: [展(I)] §2 [V] ト I' , *linéaire* + コ
トカラ

$$I' \mathcal{D} j_{\lambda}(x) = \mathcal{D} I' j_{\lambda}(x)$$

依ツテ (2.1) = ヲリ

$$\mathcal{D} I' j_{\lambda}(x) = \mathcal{D} I' j_{\lambda}(x)$$

[展(I)] §2 [VI] *Premier principe d'unicité* =
依ツテ

$$I' j_{\lambda}(x) = G(\lambda) j_{\lambda}(x)$$

ト書カレル。

或ル条件ノモトデ、 $\mathcal{D} =$ 属スル任意ノ領域デ $G(\lambda)$ ノ
正則ナルコトガ云ヘルト面白イノデアアルガ 今、コレ = 融レ
ナイ。

以下、 $G(\lambda)$ ガ ヲツシタ 性質ヲ 有スル場合 = ツイテ 展開
ノ基本事項ヲノメル。

又、 $\mathcal{D}(\lambda)$ ノ 逆函数ノ 適当ナ Branch ヲ $\mathcal{D}^{-1}(\lambda)$ トシテ
 $j_{\mathcal{D}^{-1}(\lambda)}(x)$ ヲ 基本函数 = トルコト = ヲリ、始メカラ $\mathcal{D} \omega = \lambda$
トシテ 議論ヲ スゝメ得ル場合ヲ 考ヘル。 以上ノ 約束ノ
上デ、

$$(3.3) \quad S_p(x, t; f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{j_\lambda(x)}{I_t(j_\lambda(x))} I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) d\lambda$$

ヲ考ヘル。茲デ $I_t(g(x))$ ノ意味ハ、函数 $g(x)$ ヲ或ル t ノ函数ヘウツストイフ意味デ、 t ヲ下ニツケタノデアイル。コノ t ヲ固定シテ考ヘルナラバ $I_t(f(x))$ ハ $f(x)$ ノ *fonctionnelle linéaire* デアツテ、〔展(I)〕ノ $\mathcal{S}(f(x))$ ニ相当スルノデアイル、コノ *de la sorte* ノ展開形式トノ關係が生ジテクルノデアイル。

定義1. *Contour-integral* (3.3) ヲバ、 $(I, \mathcal{C}_r)$ ニ關聯シタ、 $f(x)$ ノ点 t = 於ケル *Cauchy* 和ト称ス。
 I = 關スル若干ノ假定カラ

$$(3.4) \quad I_t(j_{u^k}(x)) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial u^k} \{G(u) j_u(t)\}$$

ヲ得ラレルカ、コレモ假定シテ進マウ。然ルトキ

定理2. $I_t(j_\mu(x)) = 0$ ($1 \leq \nu \leq k$) ナラバ、 u ヲ $\mathcal{V}$ ノ内部ニ含ムヤウナ任意ノ *contour* $\mathcal{C}_r$ = 關シテ

$$(3.5) \quad S_p(x, t; j_{\mu^\nu}) = j_{\mu^\nu}(x). \quad (1 \leq \nu \leq k)$$

証明. 〔展(I)〕 §2〔VIII〕ノ記号ノ意味デ $j_{\mu^\nu}(x)$ ハ $j_{\mu^{\nu+1}, \mu}(x)$ = 外ナラナイカラ

$$\begin{aligned} (3.6) \quad I_t(\mathcal{L}_\lambda(j_{\mu^\nu}(x))) &= I_t\left(\frac{j_{\mu^{\nu+1}, \lambda}(x) - j_{\mu^\nu}(x)}{\lambda - \mu}\right) \\ &= \frac{I_t(j_{\mu^{\nu+1}, \lambda}(x)) - I_t(j_{\mu^\nu}(x))}{\lambda - \mu} \\ &= \frac{I_t(j_{\mu^{\nu+1}, \lambda}(x))}{\lambda - \mu} \end{aligned}$$

以下 $I_t'(j_\mu^p(x)) = 0$ ($1 \leq p \leq \nu$) を利用して、漸化的二歩ヲ進メルトキ

$$(3.7) \quad I_t'(\mathcal{L}_\lambda(j_\mu^\nu(x))) = \frac{I_t'(j_\lambda(x))}{(\lambda - \mu)^\nu} = \frac{G(\lambda)j_\lambda(t)}{(\lambda - \mu)^\nu}$$

ヲ得ル。依ツテ

$$(3.8) \quad S_p(x, t; f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{j_\lambda(x) G(\lambda) j_\lambda(t)}{G(\lambda) j_\lambda(t) (\lambda - \mu)^\nu} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} j_\lambda(x) = j_{\lambda^\nu}(x)$$

—— (証明終) ——

規約. $d(d^{\mathfrak{n}}) = (B_n)$ ヲ表ハス、 $d^{\mathfrak{n}}f(x)$ が存在スルトキハ、 $d^{\mathfrak{u}}(d^{\mathfrak{v}}(f(x))) = d^{\mathfrak{v}}(d^{\mathfrak{u}}(f(x))) = d^{\mathfrak{n}}f(x)$ が $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = n$ ナルヌベテノ自然数ノ組 $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ = 對シテ成立スルトスルヲテアルカラ

$$(3.9) \quad (A) \supset (B) \equiv (B_1) \supset (B_2) \supset (B_3) \supset \dots$$

トナツテキル。又 $\gamma(d^{\mathfrak{n}}) \subset (A)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ヲ假定スル。

然ルトキ、次ノ定理ヲ得。

定理3. $f(x)$ 並ニ $\mathcal{L}_\lambda(f(x))$ が共ニ (B_n) = 属スルトキハ、 $d^{\mathfrak{v}}(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$ 又 (B_n) = 属スル。更ニ今

$$(3.10) \quad I_t'(d^{\mathfrak{v}}(f(x))) = 0 \quad (\mathfrak{v} = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ナリトスレバ

$$(3.11) \quad S_p(x, t; f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{j_\lambda(x)}{\lambda^n I_t'(j_\lambda(x))} I_t'(d^{\mathfrak{n}}(\mathcal{L}_\lambda(f))) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{j_\lambda(x) k(\lambda)}{\lambda^n} d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{j_\lambda(x)}{\lambda^n \Gamma_t(j_\lambda(x))} \Gamma_t(L_\lambda(d^n f)) d\lambda$$

証明. [展(1)] §2 [VII] $L_\lambda(f(x))$ の性質ト、
假定ト = ヲリ

$$d^n(d^n L_\lambda(f(x))) = \lambda d^n(L_\lambda(f(x))) + d^n f(x)$$

他方 = 於イテ $d^n f(x) \in (A)$ ナカレ

$$d(L_\lambda(d^n f(x))) = \lambda L_\lambda(d^n f(x)) + d^n f(x)$$

ナレ如キ (C) = 属スル函数 $L_\lambda(d^n f)$ が一意 = 定マル。
依ツテ

$$d(d^n(L_\lambda(f(x)) - L_\lambda(d^n f(x))))$$

$$= \lambda(d^n L_\lambda(f(x)) - L_\lambda d^n f(x))$$

が上ノニ式カラ得ラレル。サテ

$$d^n(L_\lambda(f(x))) \in d(d^n) = (B)$$

且ツ $L_\lambda(d^n f(x)) \in (C) \subset (B)$ ナアルカラ

$$d^n(L_\lambda(f(x))) - L_\lambda(d^n f(x)) \in (B)$$

ナアリ、従ツテ [展(1)] §2 [VI] *Premier principe d'unicité* = ヲリ

$$(3.12) \quad d^n(L_\lambda(f(x))) - L_\lambda(d^n f(x)) = k(\lambda) j_\lambda(x)$$

ト書カレル。

又、 $(B_1) \supset (B_2) \supset \dots \supset (B_n)$ ナアルカラ $d^\nu(L_\lambda f)$
ハ悉ク存在シ ($1 \leq \nu \leq n$)、順次

$$d^\nu(L_\lambda(f(x))) = \lambda d^{\nu-1}(L_\lambda(f(x))) + d^{\nu-1} f(x)$$

($\nu = 1, 2, \dots, n$) が成立スルカラ

$$(3.13) \quad d^\nu(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} d^{\nu-k}(f(x)) + \lambda^\nu \mathcal{L}_\lambda(f(x))$$

トナル。コトヲ、 $\Gamma(d^\nu) \in (A)$ ナルコトカラ $d(I) \subseteq (A)$ ナカラ、コノ式ト假定ト=ヨリ

$$(3.14) \quad \Gamma(d^\nu \mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \lambda^\nu \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$$

ヲ得ル。(3.12), (3.14) ヲ併セテ

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) &= \frac{1}{\lambda^\nu} \Gamma(d^\nu(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))) \\ &= \frac{1}{\lambda^\nu} \{ \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(d^\nu f(x))) + h(x) j_\lambda(x) \} \end{aligned}$$

コレカラ (3.11) が得ラレル。

定理4. 今次ノ條件が充サレテキルトスル。

(i) $f(x) \in (A)$ = シテ函数方程式 (I) ノ解デアイル。

即チ、任意ノ $t \in X$ = 對シテ

$$I_t(f(x)) = 0$$

(ii) $\lambda \in \mathcal{M} =$ 對シテ $I_t(j_\lambda(x)), I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$ ハ共
= t ノ函数トシテ $(B) =$ 属スル。

然ルトキハ、Cauchy 和 $S_r(x, t; f)$ ハ、任意ノ $\mathbb{Q}_r =$ 對シテ $t =$ 無關係デアイル。即チ $t \in X, t' \in X$ ナルトキ常=

$$S_r(x, t; f) = S_r(x, t'; f)$$

が成立スル。

証明。一般=

$$I_t(d^\nu(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))) = \lambda I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) + I_t(f(x))$$

コゝ = 假定 (i), (ii) 並 = (2.1) = ヨツテ

$$\mathcal{U}(I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))) = \lambda I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$$

従ツテ [展(I)] § 2 [VI] *Premier principe d'unicité*
= 依ツテ

$$I_t(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) = \mathcal{P}(\lambda) j_\lambda(t)$$

トイフ形デ書キ得ラレル。又條件 (ii) ト (2.1) ト = ヨリ

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(I_t(j_\lambda(x))) &= I_t(\mathcal{U}(j_\lambda(x))) = I_t(\lambda j_\lambda(x)) \\ &= \lambda I_t(j_\lambda(x))\end{aligned}$$

依ツテ又

$$I_t(j_\lambda(x)) = G(\lambda) j_\lambda(t)$$

トナル。コレカラ所要ノ結果ヲ得ラレルコトハ明ラカ。

注意: 展開形式 = 於テ $\delta\{f(x)\}$ ナル *fonctionnelle linéaire* が與ヘラレタトキ、或ル t_0 = 於テ

$$\delta\{f(x)\} = I_{t_0}\{f(x)\}$$

トナリ且ツ § 2 ノ條件 = ミタス *Opérateur linéaire*
 $I_t(f(x))$ ハ存在スルカ、又如何ナル場合 = 於テ 一意的 =
存在スルカハ一ツノ問題デアル。[展(II)] テ論ジタ Bessel
函数展開デ、Fourier-Bessel ノ場合 = ハ、

$$I_t(j(\lambda x)) = j(\lambda t) j(\lambda t)$$

ナル如キ I ヲ考ヘル。 $j(\lambda t) = 0$ = ナルヤウナ λ ノ集合
ヲ $\{\lambda_n\}$ デアラハス (コノ際コレラハ皆單根デアイル)。
 $f(x) \in (A)$ デアツテ、

$$f(x) \sim \sum c_n j(\lambda_n x) \quad (*)$$

ナルトキ

$$f_j(t) \sim \sum C_n j(\lambda_n b) j(\lambda_n t) \quad (**)$$

ナル如キ $f_j(t)$ が (A) = 属スルナラバ、

$$I_t(f(x)) = f_j(t)$$

ナリト定義スレバ

$$f(b) = \sum C_n j(\lambda_n b)$$

ナル限リ (コレハ、点 $b = \tau$, $f(x)$ が素直ナ函数 (例ヘバ
有界変分デ且ツ連続) デアレバ成リ立ツコトデアル)

$$I_0(f(x)) = f(b) = \delta(f(x))$$

トナツテ所要ノ結果が得ラレル。(*) = 於イテ、係数 C_n が
Cauchy 和 = ヲツテ興ヘラレルコトハ言フマデモナイ。