



Title	Quermassintegralノ確率の意義
Author(s)	栗田, 稔
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 115, p. 11-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74448
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

523. Quermassintegral, 確率的意義

栗田 稔 (東大學生)

n 次元 Euklid 空間 E_n 内ノ r 次元線状空間 E_r ハ
ソレニ含マレル任意ノ点 u 及ビ之ヲトホル r 個ノ Vektor
ノ正規直交系

$$(U) \quad u^{(1)} \dots u^{(r)}$$

ニヨツテ決定サレル。更ニ $n-r=\Delta$ 個ノ Vektor

$$(V) \quad v^{(1)} \dots v^{(\Delta)}$$

ヲトリ (U), (V) が E_n ノ完全正規直交系ナル様ニスル。

サテ Differential ハスベテ・ヲモツテアテハン,
又 Differential ノ積ハスベテ alternierend 即チ
 $\dot{a}\dot{b} = -\dot{b}\dot{a}$, $\dot{a}\dot{a} = 0$ トスルトキ, r 次元平面 E_r ノ E_n
内デノ Dichte ハ

$$G_r = \prod_{j=1, \dots, \Delta} \pi_{\nu^j} \prod_{\substack{i=1, \dots, r \\ k=1, \dots, \Delta}} \pi_{p^{ik}}$$

$$\nu^j = (\nu^{(j)}, u^j) \quad p^{ik} = (\dot{u}^{(i)}, v^{(k)})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{以上 W. Blaschke Integralgeometrie I} \\ \text{Actualités scientifiques 252 2.12.31} \end{array} \right)$$

ソレデ E_n 内ニ konvexer Körper K ガアルトキ之ヲ
キル E_r ノ Anzahl (mass) ヲ M_r トスルトキハ

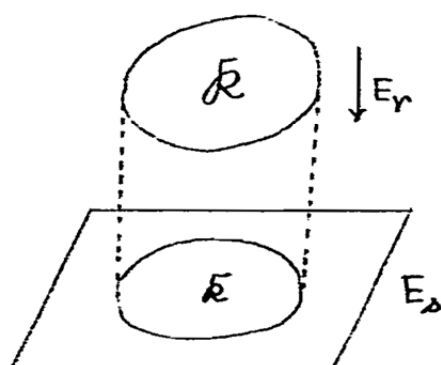
$$M_r = \int_{K \in E_r} G_r = \int_{K \in E_r} \prod_{j=1, \dots, \Delta} \pi_{\nu^j} \prod_{i=1, \dots, r} \pi_{p^{ik}}$$

之レヲ計算スルノニ先ツ $u^{(1)} \dots u^{(n)}$ $v^{(1)} \dots v^{(n)}$ ヲ固定シテ u ノミニ

ツイテノ積分

$$m = \int \pi v^i$$

ヲ考ヘル。コノトキ積分範囲ハ (∇) ノ定メル n 次元平面 E_n 上ヘノ K ノ正射影ニ他ナラナイ。コノ正射影ヲ K トスル



トキ K が E_n 上ノ *konvexer Körper* デアルコトハ明ラカデアリ。

サテ πv^i ハ *drehung* = 對シテ不変 (上記 Blaschke I, S. 13) デアルカラ適當ニ施シテ

$$v^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$$

$$v^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots v^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

4 番目

トスルトキ $v^i = \dot{x}_i$ トナリ

$$\pi v^i = \dot{x}_1 \dots \dot{x}_n$$

従ツテ $m = \int \dot{x}_1 \dots \dot{x}_n = K$ ノ n 次元ノ体積

之レヲ $\sigma(u^{(1)} \dots u^{(n)})$ トカクト

$$(A) \quad M_r = \int \sigma(u^{(1)} \dots u^{(n)}) \pi p^{ik}$$

次ニ γ ヲ E_n 内ノ單位球トスルベ $K + \lambda \gamma$ ノ体積ハ

$$V(K + \lambda \gamma) = W_0 + n\lambda W_1 + \dots + \binom{n}{r} \lambda^r W_r + \dots + \lambda^n W_n$$

Bonnesen und Fenchel: Theorie der Konvexen

Körper S. 49 Formal (4) = ヨレバ (ソコデ $\frac{1}{n}$ がオチテ
キル).

$$W_\nu(\bar{k}) = \frac{1}{n K_{n-1}} \int W'_{\nu-1}(\bar{k} u) d\omega$$

コ = $W'_{\nu-1}(\bar{k} u)$ ハ $\bar{k}$, u 方向へノ正射影 (之モ konvexer
Körper) ノ $W_{\nu-1}$ ヲアラハシ $d\omega$ ハ γ , u 方向ノ半径ノ
端デノ Flächenelement , K_{n-1} ハ $n-1$ 次元単位球ノ体
積デアール. (窪田博士: 東北理科報告 Bd. 14 参照)

コノ Formal ヲ繰返シ用ヒテ

$$W_r(\bar{k}) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)K_{n-1}\cdots K_{n-r}} \int W_0^{(r)}(\bar{k} u^{(1)} \cdots u^{(r)}) d\omega_1 \cdots d\omega_r$$

但シ $d\omega_\nu$ ハ原点ヲトホル $u^{(\nu+1)} \cdots u^{(r)} =$ 垂直ナ平面内デ
ノ $\Delta + \nu$ 次元単位球ノ $u^{(\nu)}$ ナル方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement
デアール.

ソコデ先ヅ $d\omega_1$ ヲ考ヘルトキ適當ニ Drehung ヲ行
ツテ

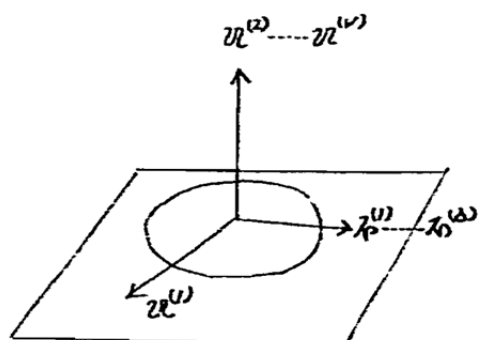
$$u^{(2)} = (0, \cdots 0, \overbrace{1, 0 \cdots 0}^{r-1})$$

$$u^{(3)} = (0, \cdots 0, \overbrace{1, 0 \cdots 0}^{r-2}) \cdots u^{(r)} = (0, \cdots 0, 1)$$

トスレバ

$$d\omega_1 = \sum_{i=1}^{\Delta+1} (-1)^{i+1} u_i^{(1)} \dot{u}_1^{(1)} \cdots \dot{u}_{i-1}^{(1)} \dot{u}_{i+1}^{(1)} \cdots \dot{u}_{\Delta+1}^{(1)}$$

$u^{(1)} r^{(1)} \dots r^{(2)}$ に正規直交系ヲナスカラ



$$dw_1 = \sum (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} u^{(1)}_1 & \dots & u^{(1)}_{i-1} & u^{(1)}_{i+1} & \dots & u^{(1)}_{\Delta+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ u^{(\Delta)}_1 & \dots & u^{(\Delta)}_{i-1} & u^{(\Delta)}_{i+1} & \dots & u^{(\Delta)}_{\Delta+1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \dot{u}^{(1)}_1 & \dots & \dot{u}^{(1)}_{i-1} & \dot{u}^{(1)}_{i+1} & \dots & \dot{u}^{(1)}_{\Delta+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dot{u}^{(\Delta)}_1 & \dots & \dot{u}^{(\Delta)}_{i-1} & \dot{u}^{(\Delta)}_{i+1} & \dots & \dot{u}^{(\Delta)}_{\Delta+1} \end{matrix}$$

$$= (\dot{u}^{(1)}_1 u^{(1)}_1 + \dot{u}^{(1)}_2 u^{(1)}_2 + \dots + \dot{u}^{(1)}_{\Delta+1} u^{(1)}_{\Delta+1}) \dots$$

$$\dots (\dot{u}^{(1)}_1 u^{(\Delta)}_1 + \dots + \dot{u}^{(1)}_{\Delta+1} u^{(\Delta)}_{\Delta+1})$$

$$= (\dot{u}^{(1)} r^{(1)}) (\dot{u}^{(1)} r^{(2)}) \dots (\dot{u}^{(1)} r^{(\Delta)})$$

Skalarprodukt の Drehung = 對シテ不変ナルカラ一般
ノ位置ニ

$$dw_1 = (\dot{u}^{(1)} r^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(1)} r^{(\Delta)})$$

dw_2 ノトキモ大体同様ニシテ

$$dw_2 = (\dot{u}^{(2)} r^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(2)} r^{(\Delta)}) (\dot{u}^{(2)} u^{(1)})$$

以下同様ニ

$$dw_3 = (\dot{u}^{(3)} r^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(3)} r^{(\Delta)}) (\dot{u}^{(3)} u^{(1)}) (\dot{u}^{(3)} u^{(2)})$$

$$dw_r = (\dot{u}^{(r)} r^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(r)} r^{(\Delta)}) (\dot{u}^{(r)} u^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(r)} u^{(r-1)})$$

ソレ故

$$(B) \quad dw_1 \dots dw_r = \prod_{\substack{i=1, \dots, r \\ k=1, \dots, \Delta}} \dot{u}^{(i)}_k \cdot S$$

$$S = (\dot{u}^{(r)} u^{(1)}) \dots (\dot{u}^{(r)} u^{(r-1)}) \dots (\dot{u}^{(1)} u^{(1)})$$

即チ S ハ上記 Blaschke I, S. 14 ノ sphärische Kinematik

ノ Mass = 對スル Dichte = 他ナラナシ. 又

$$\sigma(u^{(1)} \dots u^{(r)}) = w_0^{(r)}(\mathcal{K} u_+^{(1)} \dots u^{(r)})$$

だから (B) 7 (A) = 入レル トキハ

$$\begin{aligned} w_r(\mathcal{K}) &= c_r \int \sigma(u^{(1)} \dots u^{(r)}) \prod p^{i_k} \cdot S \\ &= c_r / \left[\int G_r \right] S. \end{aligned}$$

$\int G_r$ ハ S = ハ 無関係 アアルカラ

$$= c_r \int S \int G_r$$

又止 = ノベタコトト同ジ様 = シテ

$$\int S = w_r w_{r-1} \dots w_2$$

但シ、 w_r ハ r 次元 単位球ノ表面積

ソレデ

$$w_r(\mathcal{K}) = c'_r \int G_r$$

$$\begin{aligned} c'_r &= \frac{(n-r) w_r \dots w_1}{n \cdot (n-1) \dots c_{n-1} \dots (n-r) K_{n-r}} \\ &= \frac{n-r}{n} \frac{w_r \dots w_1}{w_{n-1} \dots w_{n-r}} \end{aligned}$$

即チ $\mathcal{K}$ / *Quermassintegral* w_r ハ $r = 1 \dots n$ 関係スル
Faktor ヲノゾイテハ $\mathcal{K} =$ 交ハル平面 E_r / *Mass* = 等
 シ。

從ツテ $E_2, E_3 =$ 於テ *Crofton* ノエタ結果ハ一般ノ次元 = 擴張サレタコト = ナル。(例へバ *W. Blaschke: Differentialgeometrie I: 2. Aufl. S. 164* 参照)

系トシテ E_n 内 = ニツノ 閉曲面 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ (*konvex* デナ

クテモイ・ノ) がアツテ $\bar{K}_1$ ハ $\bar{K}_2$ = 含マレテキルトスル、ソ
 ノトキ $\bar{K}_2$ ヲキル Y 次元平面ガ $\bar{K}_1$ ヲモキル確率ハ

$$\frac{W_r(\bar{K}_1)}{W_r(\bar{K}_2)}$$

デアル。但シ $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ ハ夫々 K_1, K_2 , konvexe Hülle
 デアル。

以上 — 11. 11. 25 —