OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Quermassintegralノ確率的意義
Author(s)	栗田, 稔
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 115, p. 11-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74448
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

523. Quermassintegral ノ確率的意義

栗田　稔（東大學生）

n 次元 Euklid 空間 E_n 内ノ r 次元線狀空間 E_r ハソレニ含マレル任意ノ点 o 及ビ之レヲトホル r 個ノ Vektor ノ正規直交系

(U)　$u^{(1)}$ ------- $u^{(r)}$

ニヨッテ決定サレル。更ニ $n-r=s$ 個ノ Vektor

(V)　$v^{(1)}$ -------$v^{(s)}$

ヲトリ (U), (V) ガ E_n ノ完全正規直交系ナル様ニスル。

サテ Differential ハスベテ・ヲモッテアラハシ，又 Differential ノ積ハスベテ alternierend 即チ $\dot{a}\dot{b}=-\dot{b}\dot{a}$, $\dot{a}\dot{a}=0$ トスルトキ，r 次元平面 E_r ノ E_n 内デノ Dichte ハ

$$G_r=\prod_{j=1,\cdots s} v^j \prod_{\substack{i=1,\cdots r\\ K=1,\cdots s}} p^{iK}$$

コヽニ　$v^j=(v^{(j)}, ie)$　$p^{iK}=(iu^{(i)}, v^{(K)})$

（以上 W. Blaschke Integralgeometrie I Actualités scientifique 252 s. 12 ヨリ）

ソレデ E_n 内ニ konvexer Körper k ガアルトキ之レヲキル E_r ノ Anzahl (Mass) ヲ M_r トスルトキハ

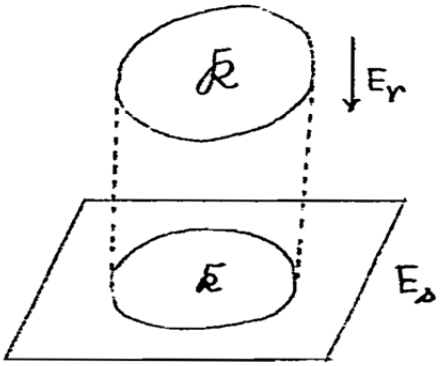
$$M_r=\int_{k\,E_r\text{キル}} G_r=\int_{k\,E_r\text{キル}} \pi v^j \pi p^{iK}$$

之レヲ計算スルノニ先ヅ $\mathfrak{u}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{u}^{(r)}$ ヲ固定シテ $\mathfrak{v}$ ノミニ
$\mathfrak{v}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{v}^{(s)}$

ツイテノ積分

$$m=\int \Pi \nu^{j}$$

ヲ考ヘル。コノトキ積分範囲ハ（∇）ノ定メル s 次元平面 E_s 上ヘノ $\mathfrak{K}$ ノ正射影ニ他ナラナイ。コノ正射影ヲ $\mathfrak{K}$ トスルトキ $\mathfrak{K}$ ガ E_s 上ノ konvexer Körper デアルコトハ明ラカデアル。



サテ $\Pi\nu^{j}$ ハ Drehung ニ對シテ不変（上記 Blaschke I, S.13）デアルカラ適當ニ施シテ

$$\mathfrak{v}^{(1)}=(1,0,\cdots\cdots 0)$$

$$\mathfrak{v}^{(2)}=(0,1,0,\cdots\cdots)\cdots\cdots\mathfrak{v}^{(s)}=(0,\cdots\cdots 0,\underset{s\text{番目}}{1},0,\cdots\cdots 0)$$

トスルトキ $\nu^{j}=\dot{x}_j$ トナリ

$$\Pi\nu^{j}=\dot{x}_1\cdots\cdots\dot{x}_s$$

從ツテ $m=\int \dot{x}_1\cdots\cdots\dot{x}_s=\mathfrak{K}$ ノ s 次元ノ体積

之レヲ $\sigma(\mathfrak{u}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{u}^{(\nu)})$ トカクト

$$\text{(A)}\quad M_r=\int\sigma(\mathfrak{u}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{u}^{(r)})\,\Pi p^{iK}$$

次ニ γ ヲ E_n 内ノ單位球トスレバ $\mathfrak{K}+\lambda\gamma$ ノ体積ハ

$$V(\mathfrak{K}+\lambda\gamma)=W_0+n\lambda W_1+\cdots\cdots+\binom{n}{\nu}\lambda^{\nu}W_{\nu}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\lambda^{n}W_n$$

Bonnesen und Fenchel: Theorie der Konvexen

Körper S.49 Formal (4) ニヨレバ（ソコデ $\frac{1}{n}$ ガオチテキル）.

$$W_\nu(\mathfrak{k}) = \frac{1}{n K_{n-1}} \int W'_{\nu-1}(\mathfrak{k}\, u)\, dw$$

コヽニ $W'_{\nu-1}(\mathfrak{k}\, u)$ ハ $\mathfrak{k}$ ノ u 方向ヘノ正射影（之モ konvexer Körper）ノ $W_{\nu-1}$ ヲアラハシ dw ハ γ ノ u 方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement，K_{n-1} ハ $n-1$ 次元単位球ノ体積デアル．（窪田博士：東北理科報告 Bd. 14 参照）

コノ Formal ヲ繰返シ用ヒテ

$$W_r(\mathfrak{k}) = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1) K_{n-1}\cdots K_{n-r}} \int W_0^{(r)}(\mathfrak{k}\, u^{(1)} \cdots u^{(r)})\, dw_1 \cdots dw_r$$

但シ dw_ν ハ原点ヲトホル $u^{(\nu+1)} \cdots\cdots u^{(r)}$ ニ垂直ナ平面内デノ $\delta+\nu$ 次元単位球ノ $u^{(\nu)}$ ナル方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement デアル．

ソコデ先ヅ dw_1 ヲ考ヘルトキ適當ニ Drehung ヲ行ツテ

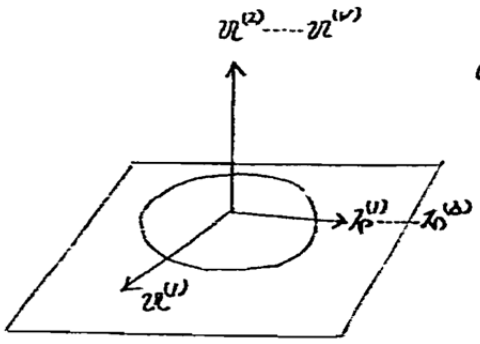
$$u^{(2)} = (0, \cdots\cdots 0, \overbrace{1, 0 \cdots\cdots 0}^{r-1})$$

$$u^{(3)} = (0, \cdots\cdots 0, \overbrace{1, 0 \cdots\cdots 0}^{r-2}) \cdots\cdots u^{(\nu)} = (0, \cdots\cdots 0, 1)$$

トスレバ

$$dw_1 = \sum_{i=1}^{\delta+1} (-1)^{i+1} u_i^{(1)}\, \dot{u}_1^{(1)} \cdots\cdots \dot{u}_{i-1}^{(1)}\, \dot{u}_{i+1}^{(1)} \cdots\cdots \dot{u}_{\delta+1}^{(1)}$$

$\mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{v}^{(2)}\cdots\cdots\mathfrak{v}^{(\Delta)}$ ハ正規直交系ヲナスカラ



$$dw_1 = \sum (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} \cdots v_{i-1}^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} \cdots v_{\Delta+1}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ v_1^{(\Delta)} \cdots v_{i-1}^{(\Delta)} & v_{i+1}^{(\Delta)} \cdots v_{\Delta+1}^{(\Delta)} \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1^{(1)} \cdots u_{i-1}^{(1)}\, u_{i+1}^{(1)} \\ \cdots u_{\Delta+1}^{(1)} \end{matrix}$$

$$= (u_1^{(1)} v_1^{(1)} + u_2^{(1)} v_2^{(1)} + \cdots\cdots + u_{\Delta+1}^{(1)} v_{\Delta+1}^{(1)}) \cdots$$

$$\cdots\cdots (u_1^{(1)} v_1^{(\Delta)} + \cdots\cdots + u_{\Delta+1}^{(1)} v_{\Delta+1}^{(\Delta)})$$

$$= (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{v}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{v}^{(2)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{v}^{(\Delta)})$$

Skalarprodukt ハ Drehung ニ對シテ不変ダカラ一般ノ位置デ

$$dw_1 = (\dot{\mathfrak{u}}_1^{(1)}\mathfrak{v}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)}\mathfrak{v}^{(\Delta)})$$

dw_2 ノトキモ大体同様ニシテ

$$dw_2 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{v}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{v}^{(\Delta)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{u}^{(1)})$$

以下同様ニ

$$dw_3 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{v}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{v}^{(\Delta)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{u}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)}\mathfrak{u}^{(2)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dw_r = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{v}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{v}^{(\Delta)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(r-1)})$$

ソレ故

$$(B) \qquad dw_1 \cdots\cdots dw_r = \prod_{\substack{i=1,\cdots r \\ K=1,\cdots\Delta}} p_{iK} \cdot S$$

コヽニ $S = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)}\mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)}\mathfrak{u}^{(1)})$

即チ S ハ上記 Blaschke I, S. 14 ノ sphärische Kinematik ノ Mass ニ對スル Dichte ニ他ナラナイ．又

$$\sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)}) = W_0^{(r)}(K\, u_+^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)})$$

ダカラ (B) ヲ (A) ニ入レルトキハ

$$W_r(K) = c_r\int \sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)})\,\Pi p^{iK}\cdot S$$

$$= c_r\int\left[\int G_r\right] S.$$

$\int G_r$ ハ S ニハ無関係デアルカラ

$$= c_r\int S\int G_r$$

又上ニノベタコトト同ジ様ニシテ

$$\int S = w_r\, w_{r-1}\cdots\cdots\cdots w_2$$

但シ、w_ν ハ ν 次元単位球ノ表面積

ソレデ

$$W_r(K) = c_r'\int G_r$$

$$c_r' = \frac{(n-r)\,w_r\cdots\cdots\cdots w_1}{n\cdot(n-1)\,{}_nC_{n-1}\cdots\cdots\cdots(n-r)\,K_{n-r}}$$

$$= \frac{n-r}{n}\,\frac{w_r\cdots\cdots w_1}{w_{n-1}\cdots\cdots w_{n-r}}$$

即チ K ノ Quermassintegral W_r ハ r ニノミ関係スル Faktor ヲノゾイテハ K ニ交ハル平面 E_r ノ Mass ニ等シイ。

從ッテ E_2, E_3 ニ於テ Crofton ノエタ結果ハ一般ノ次元ニ擴張サレタコトニナル。（例ヘバ W. Blaschke: Differentialgeometrie I: 2 Aer aufl. S. 164 参照）

茲ニシテ E_n 内ニ二ツノ閉曲面 K_1, K_2（K_2 convex デナ

クテモイイノガアッテ K_1 ハ K_2 ニ含マレテキルトスル、ソノトキ K_2 ヲキルr次元平面ガ K_1 ヲモキル確率ハ

$$\frac{W_r(\overline{K_1})}{W_r(\overline{K_2})}$$

デアル．但シ $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ ハ夫々 K_1, K_2 ノ konvexe Hülle デアル．

以上　— 11. 11. 25 —