



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Le Principe du maximum 二就イテ                                                 |
| Author(s)    | 南, 右内                                                                       |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1936, 116, p. 1-7                                                |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74450">https://doi.org/10.18910/74450</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 525. Le Principe du maximum = 就イテ

南 右 内 (札幌一中)

定義 函数  $f(z)$  を任意ノ領域  $D$  に於て定義セラレタ函数  
トシ,  $D$  ノ縁ノ点  $\zeta$  及  $\subset D$  内ヨリ  $\zeta$  に收斂スル点列  $\{z_n\}$   
ヲ取り

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta, z_n \in D \right)$$

ヲ考ヘル。点列  $\{z_n\}$  を種々ニ変化シテ得ル上ノ極限  
値 (存在スルモノダケヲ考ヘ) ノ集合ヲ  $C(\zeta)$  ト表ハシ,  
コレヲ  $\zeta$  ニ對スル *Cluster set* ト稱ス。

集合  $B$  ニ對シ  $B$  ヲ *analytic curve*  $\Gamma$  ニテ包ミ,  
ソレニ含まレル点集合ヲ  $A_\Gamma(B)$  ト表ハス。

定理.  $f(z)$  ハ次ノ性質ヲ有ス。

1°  $f(z)$  ハ任意ノ領域  $D$  に於て正則デアアル。

2°  $f(z)$  ハ  $D$  ノ縁ノ近傍ニ有界デアアル。

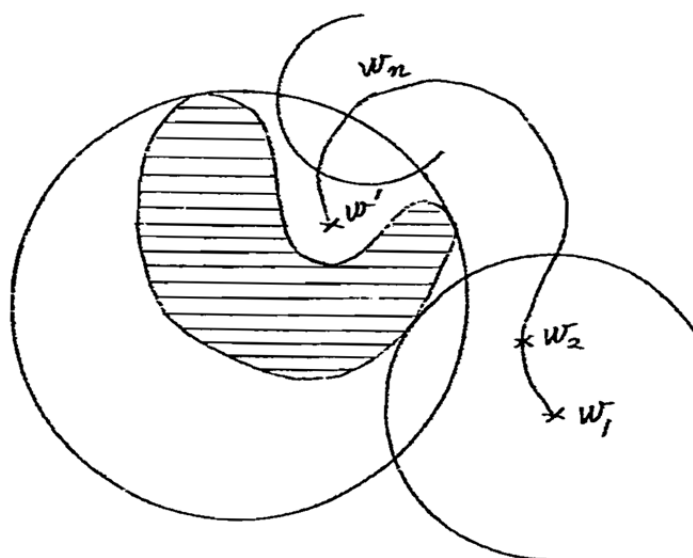
然ルトキハ  $D$  ノ各点ニ對シテ

$$f(z) \in A_\Gamma(\Sigma' C(\zeta))$$

若シ  $D$  ノ一点ニ  $f(z) \in \Gamma$  ナラバ  $f(z)$  ハ常數デアアル。  
但シ  $\Sigma'$  ハ  $D$  ノ縁カラ有限個ノ点ヲ除ク点ニ關スル和ヲ表  
ハス。

証明.

1.  $D$  が有界ナル場合



先づ  $f(z)$  は  $D$  で有界ナル、故ニ常數  $M$  が存在シテ  
 $D$  の各点ニ對シテ  $|f(z)| \leq M$  が成立スル。

今若シ  $D$  の一 点  $z'$  ニ對シテ

$$w' = f(z') \in A_r(\Sigma' C(\zeta))$$

トセヨ。

然ルトキハ  $w$ -plane ニ於テ原点ヲ中心、半径  $M$  ノ円  
ヲ  $K(0, M)$  ト表ハセバ  $K(0, M)$  ノ外ノ一 点  $w_1$  ト  $w'$  ト  
ハ  $A_r(\Sigma' C(\zeta))$  ト共有點ヲモタナシ。Jordan curve (長  
サノアル) デ結ブコトが出来ル。

$$\text{今 } \rho(w_1, K(0, M)) = \rho_1'$$

$$\rho(w_1, A_r(\Sigma' C(\zeta))) = \rho_1$$

トシテ  $W = F(w) = \frac{1}{w - w_1}$  ナル変換ヲ施ス、然ラバ  $F\{f(z)\}$   
ナル函数ハ  $D$  の各点デ定義セラレ

$$1^\circ F\{f(z)\} \text{ ハ } D \text{ で正則}$$

$$2^\circ D \text{ の縁デ } z_1, z_2, \dots, z_n \text{ ヲ除キテ } \zeta \text{ ヲトレバ } D$$

$$\text{内ヨリ } \zeta = \text{收斂スル点列 } \{z'_n\} = \text{對シテ}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F\{f(z'_n)\}| \leq \frac{1}{\rho_1} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \zeta, z'_n \in D)$$

3°  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の近傍に有界。

$$M = |F\{f(z)\}| \leq \frac{1}{\rho_1}$$

従って良ク知ラレタル Lindelöf の maximum principle  
= 依り  $D$  の凡テノ点デ

$$|F\{f(z)\}| \leq \frac{1}{\rho_1}$$

$$\text{即チ} \quad |f(z) - w_1| \geq \rho_1$$

故ニ  $f(z)$  ハ  $w_1$  を中心トシテ  $\rho_1$  を半径トスル円ノ内部ニハ  
入ラナイ。

次ニ  $K(w_1, \frac{\rho_1}{2})$  ト  $J$  トノ交点ノ内  $w_1$  カラ一番遠  
キモノヲ  $w_2$  トスル。

$$\rho(w_2, A_P(\Sigma' C(\zeta))) = \rho_2$$

$$\text{トヲキ} \quad F_1\{f(z)\} = \frac{1}{f(z) - w_2} \quad \text{ナル函数ニ付テ前ニ様ノ原}$$

理ニヨリ  $D$  ノ凡テノ点ニ對シ

$$|f(z) - w_2| \geq \rho_2$$

ガ成立スル。即チ  $f(z)$  ハ  $K(w_2, \rho_2)$  ノ外ニアル。

以下同様ニシテ順次  $w_3, w_4, \dots, w_n, \dots$  を求メ  
テ行ク、然ルトキハ  $J$  = 沿フテノ  $w_i, w_i'$  ノ距離ヲ  $\rho$  トスレバ  
 $w_i$  ハ  $K(w_1, \rho_1), K(w_2, \rho_2), \dots, K(w_n, \rho_n)$  ノ  
外ニアルカラ

$$\rho \geq \overline{w_1 w_2} + \overline{w_2 w_3} + \dots + \overline{w_{n-1} w_n} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{n-1})$$

然 $\nu = \bigcup A_P(\Sigma' C(\zeta))$ トノ最小距離ヲ $\delta$ トスレバ

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{n-1} \geq (n-1)\delta$$

$$\therefore \rho \geq \frac{n-1}{2}\delta$$

$D$ ノ凡テノ点ニ對シ  $f(\alpha)$  ハ

$$K(w_1, \rho_1), K(w_2, \rho_2), \cdots, K(w_n, \rho_n), \cdots$$

ノ外ニアル、即チ  $w'$  ハ  $K(w_n, \rho_n)$  ( $n=1, 2, \cdots, n, \cdots$ )

ノ外ニアル。

即チ $\mu$ トハ無關係ニ  $\rho \geq \frac{n-1}{2}\delta$  ナケレバナラナイ、之レハ矛盾ナリ。

從ツテ $D$ ノ凡テノ点ニ  $f(\alpha) \in A_P(\Sigma' C(\zeta))$  ガ成立スル。

次ニ  $D$ ノ内点ニ於イテ  $w' = f(\alpha') \in \Gamma$  ノ場合ヲ考ヘル、コノトキ若シモ  $f(\alpha)$  ガ常數ナケレバ  $w = f(\alpha)$  ハ  $D$ ニ正則ナル故、一 $w_1$ ノ適當ニ近傍  $\nabla(w_1)$ ヲ作り、ソコニ一 $w'$ ヲトレバ

$$w' = f(\alpha')$$

ヲ満足スル  $\alpha'$ ハ  $\alpha_1$ ノ近傍、即チ  $D$ 内ニ存在スルヤリニ出來ル。

然 $\nu = w_1 \in \Gamma$ ナル故  $\nabla(w_1) \cap A_P(\Sigma' C(\zeta)) = \emptyset$ ニ含マレナイ点ヲ含ム。

今ソレヲ  $w'$ トスレバ  $w' = f(\alpha')$ ナル  $\alpha'$ ハ  $D$ 内ニアルカラ  $D$ 内ノ一 $\alpha'$ ニ對シ、ソレニ對應スル  $w'$ ハ  $A_P(\Sigma' C(\zeta))$ ノ外ニアルコトニナル、之レハ上ノ証明ニヨル $D$ ノ凡テノ点ニ  $f(\alpha) \in A_P(\Sigma' C(\zeta))$ ナリトノコト

ニ矛盾スル。

## 2. $D$ が有界デナイ場合

(A)  $R-D$  が内点ヲ有スルトキ

内点ノ一ツヲ  $a$  トスレバ  $Z = \frac{1}{z-a}$  ナル変換ヲ施セバ  $D$  ハ有界ナ領域  $\Omega$  トナル。

函数  $f\left(\frac{1+Za}{Z}\right)$  ヲ  $\Omega$  = 於イテ考フレバ上ト同様ノコト可言ヘル。

(B)  $R-D$  が内点ヲ有セザルトキ

$D$  ヨリ一ツノ円 (ソノ周ヲ  $S$  トス) ヲ除キタル領域ヲ  $D'$  トス。

然ラバ  $D' = \Omega$  テハ (A) ノ場合トナルカテ  $D'$  ノ凡テノ点ヲ

$$f(z) \in A\left(\sum' C(\zeta) + \sum_{\zeta \in S} C(\zeta)\right)$$

次ニ用  $S$  内デハ

$$f(z) \in A\left(\sum_{\zeta \in S} C(\zeta)\right)$$

従ツテ  $D$  ノ凡テノ点ヲ

$$f(z) \in A\left(\sum' C(\zeta) + \sum_{\zeta \in S} C(\zeta)\right) \text{ ----- (1)}$$

然ルニ  $\sum_{\zeta \in S} C(\zeta) \subset \sum' C(\zeta)$  が成立スル、何トナレバ若シ然ラズトセバ一  $\zeta$  点ヲアリテ  $C(\zeta) \notin \sum' C(\zeta)$  ナラザルベカラズ、然ルニ  $\zeta = a$  テハ  $f(z)$  ハ正則ナル故

$$C(\zeta) = f(\zeta)$$

$f(\zeta)$  ノ十分近傍ヲトレバ  $\zeta$  ノ近傍ヲノ  $f(z)$  ノ値域ヲ被ハレル。然ルニ  $f(\zeta)$  ノ如何ナル近傍  $\in A\left(\sum' C(\zeta) + \sum_{\zeta \in S} C(\zeta)\right)$

ニハナイ点ヲ含ム。

之レハ (1) ト矛盾スル。

従ツテ  $\sum_{\xi \in S} C(\xi) \subset \Sigma' C(\xi)$  デアル。

故ニ  $D$  ノ凡テノ点デ

$$f(z) \in A_r(\Sigma' C(\xi))$$

以上デ証明が終了シタノデアリマスガ

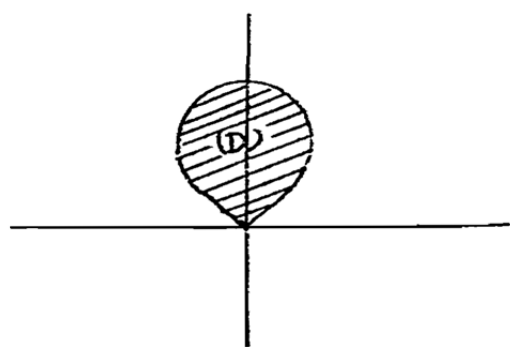
*Riemann* ノ寫像定理ヲ用ヒテ  $\Gamma$  ノ内部ヲ單位円ノ内部ニ一對一等角ニ寫像シ、單位円ニ於テ前ノ *Lindelöf* ノ principle ヲ用ヒ、然ル後  $\Gamma$  ノアレ平面ニ逆寫像ヲ行ハベ証明出來ルヤウニ思ハレルガソレハ出來ナイ。何トナレバ  $\Gamma$  ノ外ノ点ヲモ考ヘネバナラナイカラ。

一般ニ「原点ヲ中心トスル円ノ内デ正則デコノ円内ニアル *analytic curve*  $\Gamma$  ヲ考ヘ、 $\Gamma$  ノ内部ヲ單位円ノ内部ニ一對一等角ニ寫像スル函数ハ存在シナイ。」

コトガ証明サレル。

次ニ上ノ定理ニ於テ最後ノ  $f(z) \in \Gamma$  ヲ  $f(z) \in \Sigma' C(\xi)$  トシタイノデアアルガ、ソレガ不可能デアルコトハ次ノ例ヨリ明ラカデアアル。

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  トシ、 $D$  トシテ原点ヲ縁ニ含ミ、 $y$  軸上ノ



点ヲ内点トシテ含ミ且ツ  $D$  デハ  $f(z)$  が有界デアアル如キ領域  $D$  ヲトル。

ソレニハ  $z = re^{i\theta}$  トシテ  $D$  デハ  $\frac{1}{r} \cos \theta \leq M$  ( $M$  ハ常

数)が成スル如クスレバ十分デアル。

然ルトキハ

1°  $f(z)$  ハ  $D$  正則ナリ。

2°  $D$  ノ 縁ノ 近傍デハ有界。

デアルガ  $D$  ノ 一ツノ 点  $z_0$  = 對シテ  $f(z) \in C(o)$  ナル如キ  $z_0$  が存在ス。ソレハ

$$z_1 = \frac{1}{\theta} e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = \frac{1}{\theta + 2\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots, z_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \dots\dots\dots$$

トスレバ

$$f(z_1) = e^{\frac{1}{z_1}} = e^{i\theta}, \quad \dots\dots\dots, f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = e^{i(\theta + 2n\pi)}$$
$$= e^{i\theta}$$

∴ 斯様ナ点列  $\{z_n\}$  = 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = e^{i\theta}$$

故ニ  $e^{i\theta}$  ハ  $C(o)$  ノ一ノ点ナリ。

即チ  $z_0$  ハ一ツノ内点デ

$$f(z_0) = e^{i\theta} \in C(o)$$

ナレドモ  $f(z)$  ハ常數デハナイ。