



Title	正則ナ g 曲線系ニ就イテ (II)
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 117, p. 1-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74453
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

528. 正則な g 曲線系 = 就イテ (II)

寺 阪 英 孝 (阪大)

§2.

定義 球面ノ各点ハ、ソレヲ含ソデ正則領域が選ヤルカラ、球面 S ノ緊迫性 (*Kompaktheit*) = ヨリ、半径 R ノ近傍 $U(x, R)$ ハ x ノ如何ニ様ハラズ常ニ或ル正則領域ニ含まレルトイフ性質ヲモツタ $R > 0$ が存在スル。 R ヲ正則常数ト名ツケル。

定理5 正則領域内ニ任意ニ g 三角形 (ニツノ g 線分ヲ作ラレタ三角形) ヲツクレバ、コレ又正則領域ニナル。コレハ明ラカザアル。今 g 線分ヲ適當ニ有限個引イテ S 面ヲ有限個ノ三角形ニ三角分割 (*Triangulieren*) シ、且ツソノ直径ヲ凡ベテ R ヨリ小ナラシメレバ、各三角形ハ正則領域ニナルカラ：

定理6 S ハ有限個ノ正則領域ニヨリ三角分割出来ル。

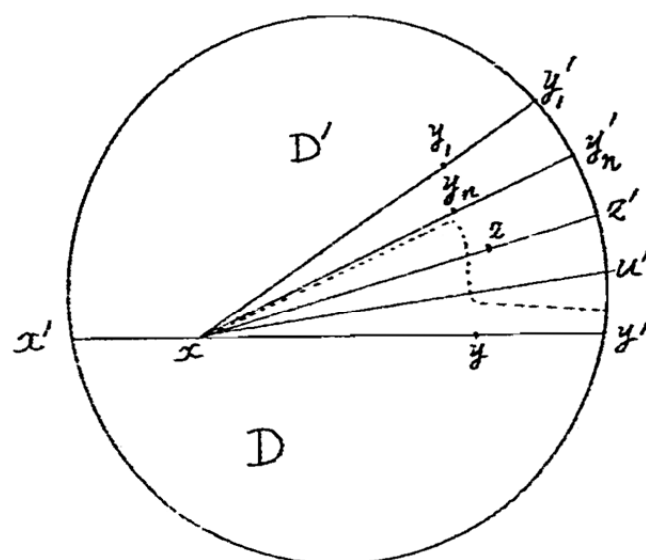
次ニ g 系ノ曲線群ノ収斂性ニツイテ考ヘヨウ。先ヅ

定理7 正則領域 D 内ノ異ナル二点 x, y 、及ビ $y_n \rightarrow y$ ($y_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$) ナル点列ニツキ一様ナ $g(\overline{xy_n}) \rightarrow g(\overline{xy})$ が成立スル。

(証) $g(\overline{xy})$ ヲ双方ニ延長シテ $\dot{D}$ ト x', y' デ交ハラセルト D ハ $g(\overline{x'y'})$ = ヨリニ分サレル。 y_n がコノ全ク一方ニ含まレル場合ガ考ヘレバヨイカラ、ソノヨウニ假定

スル。 $g(\overline{xy_n})$ を延長シテ $\dot{D}$ ト y'_n デ交ハラセルト、十
分大ナル n = ツイテハ $g(\overline{xy_n})$ ハ $g(\overline{xy'})$, $g(\overline{xy'_1})$ ト
 $\dot{D}$ ノ一部トデカゴマレタ開領域 $D' =$ ハル。ヨツテ $g(\overline{xy_n})$
ノ集積点ハ $D' =$ 属スル訳デアルガ $g(\overline{xy'})$ 上ニイ集積
点ヲ有スルトスレ

バ、 $g(\overline{xy})$ ハ
 $g(\overline{xy'})$ ト x ノミ
ヲ共有スルカラ之レ
ヲ延長シテ $\dot{D}$ ト z'
デ交ハラセルト
 $z' \neq y'$ 。ヨツテ $\dot{D}$
上デ z' , y' ノ中間ニ



u' ナル点ヲトレバ $g(\overline{xu'})$ ハ $g(\overline{xz'})$ ト $g(\overline{xy'})$ トヲ互
ニカツ。

然ルニ z ハ $g(\overline{xy_n})$ ノ集積点デカラ無数ノ n = ツイ
テ z' ノ十分近クヲ $g(\overline{xy_n})$ が通ルガ、コレハ又同時ニ y
ノ十分近クノ点 y_n ヲ通ル筈故途中デ $g(\overline{xu'})$ ヲ横ヤルコ
トトナリ、コレハ正則領域ノ性質 (一意可結性) = 反スル。

即チ $\lim g(\overline{xy_n}) < g(\overline{xy'})$

次ニ $g(\overline{xy_n})$ が $g(\overline{yy'})$ ノ y 以外ノ点 z ヲ集積点
ニモツトスレバ、無数ノ n = ツキ $g(\overline{xy_n})$ ハ y ノ近傍ノ
二点 y_n, y'_n ト z ノ近傍ノ点トヲ通ル故コレ又 $\Pi =$ 反スル。
ヨツテ $g(\overline{xy_n}) \rightarrow g(\overline{xy})$ 。

定理 8. 局所一様収斂性

x, y が正則領域 D ノ異ナ

ルニ点デ $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ ($x_n, y_n \in D, n=1, 2, \dots$)
 ナラバ一樣 =

$$g(\overline{x_n y_n}) \rightarrow g(\overline{xy})$$

前ノ定理カラ容易ニ証明出來ル。(前定理ヲ經テニ証明
 スル法如何) 本定理カラ

定理 9. 広所一樣收斂性 $g(\overline{xy})$ ハ與ヘラレタ g 線分

カデソノ上ニ正則常数 R ヨリ小サイ直徑ヲモツ g 線分

$g(\overline{xy})$ アツテ $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ トスレバ, $g(\overline{x_n y_n})$ (正
 則領域内デ x_n, y_n ヲ結ブ g 線分) ノ延長上ニ点 y_n が存在
 シテ一樣 = $g(\overline{x_n y_n}) \rightarrow g(\overline{xy})$ トナル。

コレニハ $g(\overline{xy})$ ヲ $g(\overline{xy}) = \sum_{i=1}^m g(\overline{x_{i-1} x_i})$ ($x_0 = x,$
 $x_1 = y, x_m = y$) ニ分ケ $\delta(g(\overline{x_{i-1} x_i})) < R$ トスレバヨ
 ロシイ。

§3. 次ニ重要ナ g 曲線ノ性質ハ g 曲線ガ余リ弯曲シテ
 キナイコトデアアル。レツノ單一弧ノ極ク近クヲ往復スルコト
 ハナイ, ト云フコトデアアル。(測地線ニツイテ考ヘラレタシ)
 コノ性質ノ現ハレトシテ次ノ定理ガ考ヘラレル。

定理 10. 有界彎曲性 凡テノ自然数 n = ツキ j_n ハ
 g 線分, j_n ハ S 上ノ單一弧デ $j_n + j_n' = \dot{D}_n$ ハ單一閉曲線
 ヲナシ, 且ツソレガ囲マレタ面分 D_n ハ互ニ素デアルトスル。
 コノトキ j_n' が一点 x_0 ニ收斂スルナラバ j_n モ亦同ジ点 x_0
 ニ收斂スル。

(証) コノ証明ハ少々長スヤルヤウデアアルガ, 次ノ様ニ
 出來ル。ココデハ面分ノ脈トイフモノヲ考ヘルカラ本紙 112

号「面分ノ脈=競イテ」ヲ参照サレタシ。面分ハ單一閉曲線
 デ囲マレテキルトキハ下ノ3)ノ如キ脈ノ性質ガ出ルガ、コ
 ノ証明ハ略ス。サテ

1) S 上ノ点 a , 集合 $M = \text{ツキ } P(a, M) \text{ ナルモノヲ}$

$$P(a, M) = \sup_{x \in M} P(a, x) \text{ ノ上限}$$

ヲ定義スル。特ニ M ハ單一弧 ab ナルトキ, 簡單ノタメ

$$P(ab) = P(a, ab)$$

トカク。

2) 單一閉曲線 $\dot{D}$ デ囲マレタ面分 D ノ脈ヲ M トスレバ,
 M ノ端以外ノ点 $x = \exists$ リ M ハニツ以上ノ夫々連結集合ニ分
 タレル。

ソノ中 M 上ノ一定点 O ヲ含マヌ勝手ナーツヲ M_x デ表ハシ,
 x カヲ出ル M ノ分岐トイフ。

3) $x, x_1, \dots, x_n, \dots \in M, \overline{xx_n}$ ハ M 上デ $x,$
 x_n ヲ結ブ單一弧デアツテ

$$\overline{xx_1} \subset \overline{xx_2} \subset \dots \subset \overline{xx_n} \subset \dots$$

ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{xx_n}$ ハ單一弧デアイル。($\dot{D}$ ガJordan曲

線デナケレバ必ずシニ單一弧デアハナイ)。特ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{xx_n} \subset \overline{xy}, \quad y \in M$$

ナル y ガ存在セヌトキ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{xx_n} = \overline{xy}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{xx_n} = xy$$

トオキ, x, y ヲ x カラ出ル子脈ト云フ。又 $\overline{xy}$ ノ一端 y
ハ一般ニ M ニハ属セズ、從ツテ一般ニ $\overline{xy} = \overline{xy} - (y)$
デアール。

4) d ガ與ヘラレタ正数デ, $\frac{d}{3} < r(0, M_0)$ ナルトキハ
[0ハ2)ニ於ケル点]

$$\frac{d}{4} \leq r(x, M_x) \leq \frac{d}{3}$$

ナル如キ点 x ガ M 上ニ存在スルコトガ次ノヤリニ証明出
來ル。

i) $\frac{d}{3} < r(0, M_0)$ ナル故, $0y \subset M_0$, $\frac{d}{3} < r(0y)$
ナル如キ子脈 $0y$ ガ存在スル。スルト $0y$ 上ニ点 x_1 ;
 $r(x, y) = \frac{d}{4}$ ガ存在スル。若シ $r(x_1, M_{x_1}) \leq \frac{d}{3}$ ナラバ
 x_1 ガ求メル x デアール。

ii) $\frac{d}{3} < r(x_1, M_{x_1})$ ナラバ

$$x_1, y_1 \subset M_{x_1}, \frac{d}{3} < r(x_1, y_1)$$

ナル如キ子脈 x_1, y_1
ガ存在スル、スルト

$$x_2 \in x_1, y_1,$$

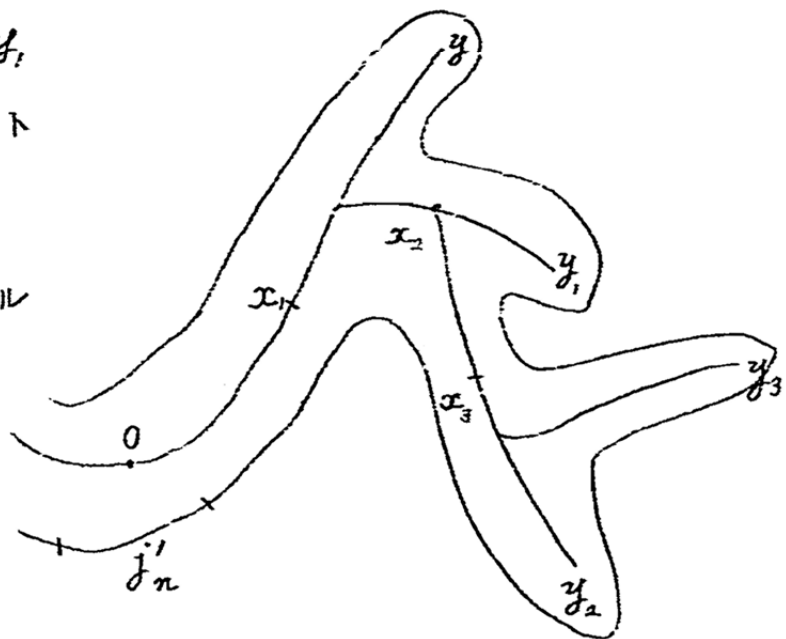
$$r(x_2, y_1) = \frac{d}{4} \text{ナル}$$

x_2 ガ存在スル。

$$\text{若シ } r(x_2, M_{x_2}) \leq \frac{d}{3}$$

ナラバ x_2 ガ求

ムル x デアール。



iii) 同様ニ進ンデユケバ有限回デ ρ が求マルノ デアル。
何者、モシ然ラズシテ $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ナル無限
列ガアツタトスレバ一般ニ

$$\frac{d}{3} < r(x_n y_n), \quad x_{n+1} \in x_n y_n,$$

$$\frac{d}{4} = r(x_{n+1} y_n)$$

ナル故 $\alpha) \frac{d}{3} < r(\overline{x_n x_{n+1}})$ カ然ラザレバ $\beta) \frac{d}{3} < \rho(x_n, z)$

又 $z \in x_{n+1} y_n$ ナル如キ z ガ存在スル。 $\beta)$ ナラバ

$$\rho(x_{n+1}, z) \leq \frac{d}{4} \quad \text{ナル故}$$

$$\rho(x_n x_{n+1}) \geq \rho(x_n, z) - \rho(x_{n+1}, z) > \frac{d}{3} - \frac{d}{4} = \frac{d}{12}$$

$\alpha), \beta)$ イツレニシテモ $r(\overline{x_n x_{n+1}}) > \frac{d}{12}$ トナル。

所ガ、 $\overline{0x_n} = \overline{0x_1} + \overline{x_1 x_2} + \dots + \overline{x_{n-1} x_n}$ ナル故

3) = ヨリ $\overline{0x_n}$ ハ 単一弧ニ收斂スル筈カカラ

$$r(\overline{x_{n-1} x_n}) > \frac{d}{12} \quad \text{ナルコトハアリ得ナイ。}$$

5) 定理 10 ノ証明ヲトリカナル。 $f_n \rightarrow a$ デナイト
假定シテ矛盾ヲ導ケバヨイ。 $f_n \rightarrow a$ デナイトスレバ無数ノ
 n = ツキ $|f_n| > d > 0$ ナル如キ正数ガ存在スルガ d ハ正
則常数 R ヨリ小トシテ差支ナイ。又番号ヲツケ代ヘレバ、
スベテノ n = ツキ $|f_n| > d$ ト假定出來ル。

今 D_n = 内接スル円ノ半径ノ最大値ヲ ρ_n トスレバ、 S
上ノ無限個ノ面分 D_n ガ互ニ素デアリ從ツテ D_n ノ面積ハ $\frac{1}{n}$
ト共ニ $\rightarrow 0$ ナルコトカラ $\rho_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) トナル。

r_n の性質から $x \in \dot{D}_n$ なる点 x は D_n の周 M との距離 $< r_n$.

今 j'_n と共通点ヲモツ D_n の重内接円ノ中心ヲ O トシ之レヲ定点トシテオクト, n が十分大デ $2r_n < \frac{d}{3}$ ナルトキハ少クモ一ツノ $M_0 = \text{ツキ}$ $r(O, M_0) > \frac{d}{3}$ トナル。 ($\because \dot{D}_n$ ノ任意ノ二点ヲ y, z トシ, $\rho(y, y') < r_n, \rho(z, z') < r_n, y', z' \in M$ ナル y', z' ヲトレバ, 若シ常 $= r(O, M_0) \leq \frac{d}{3}$ ナラバ

$$\rho(O, y') \leq \frac{d}{3}, \rho(O, z') \leq \frac{d}{3}$$

ナル故

$$\begin{aligned} \rho(yz) &\leq \rho(y, y') + \rho(y', O) + \rho(O, z') + \rho(z', z) \\ &\leq \frac{d}{3} + \frac{d}{3} + \frac{d}{3} \end{aligned}$$

トナリ、 $|j_n| > d = \text{反ス}$)

ヨツテ 4) = ヨリ M_0 上ニハ x ナル点ガアツテ

$$\frac{d}{4} \leq r(x, M_x) \leq \frac{d}{3}$$

トナル。

今 x ヲ中心トシ $D_n = \text{重内接スル円}$ $\dot{K}_n$ ヲカケバ, M_x ナル周ノ余岐 = 對スル $\dot{D}_n$ ノ部分弧 $\widehat{a_n b_n}$ ハ $\dot{K}_n$ ノ二点 a_n, b_n ヲ結ブ單一弧デ, 且ツ $r(\widehat{a_n b_n})$ ハ M_x カラ容易ニ得カル如ク

$$(*) \quad \frac{d}{4} - 2r_n \leq r(\widehat{a_n b_n}) \leq \frac{d}{3} + 2r_n$$

所テ $P(0, \infty)$ ハ 4), iii) ノ計算テ $> \frac{d}{12}$ ダツタカラ n が十
 分大デ從ツテ $|j'_n|$ 及ビ r_n が十分小ナラバ $j'_n \cdot K_n = 0$ 即
 テ j'_n ハ a_n ヲモ b_n ヲモ含マヌ、ヨツテ $j'_n \cdot \widehat{a_n b_n} = 0$ カ
 $j'_n \subset \widehat{a_n b_n}$ カデアルケレドモ $j'_n =$ 點スル點ノ點 0 ハ M_x
 $=$ 含マレテイナカラ $j'_n \subset \widehat{a_n b_n} =$ ハナラヌ。ヨツテ
 $\widehat{a_n b_n} \subset j_n$, 即チ $\widehat{a_n b_n}$ ハ二點 a_n, b_n ヲ結ブ g 線分
 デアル。然ルニ n が十分大ナラバ $P(a_n b_n)$ ハ如何程ニ
 モ小トナリ, 從ツテ a_n, b_n ヲ結ブ g 線分ハ兩點ヲ含ム正則
 領域内デハ十分小ナ g 線分ニヨツテノミ結バレルベキ筈ナル
 ニ係ハラズ, (米)ニヨリ $\frac{d}{4} - 2r_n \leq |\widehat{a_n b_n}|$ ナル g 線分
 $\widehat{a_n b_n} =$ ヨツテモ結バレテキルカラ矛盾デアアル。

コレデ $|j'_n| \rightarrow 0$ 從ツテ $j_n \rightarrow \infty$ ガ証明サレタ。