



Title	Omoituita Mama, VII
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 117, p. 8-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74454
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

529. *Omoituita Mama*, VII

福原満洲雄(北大)

1. 南雲氏ハ日本ノ數學=ハ「デレツタソチスト」ガ不
足シテキル、ト言ハレル。確カ=ソウデアロウ。ソノ上=理
論家バカリ多クテ實際家が欠乏シテキル。

此ノ紙上談話會=應用數學トカ實用數學トカ言ツタ方面ノモ
ノガ減多=現ハレナイデモ不思議=思ハレテキナイヤウデア
ル。恰モ「數學=純正數學」デアルカノヤウニ、ダガコレ

ハ自分ノ俾目カモ知レナイ。

2. 微分方程式ノ理論ノ方ハ兎ニ角、應用方面ハ全ク素人デアル。カカラコレカラ述ベル所ハ私ノ素人考デアル。

微分方程式論ノ書ニ於テ數値計算ヲ論ジテナクテモ不届ヲ感ズル人ノ方が少ナイカラウト思フ、二三年前マデハ私モソノ一人デアツタ。

カガ微分方程式論ガ微分方程式ヲ解クタメノ理論デアルナラバ、ソノ數値積分ヲ無視スルコトハ出来ナイ。解析的ノ理論ガ未ダ幼稚デ實際ニ微分方程式ヲ解クタメニ大キナ役割ヲ演ズルコトハ出来ナイ現状ニ於テハ尚更ソウデアル。岩波講座ニ微分方程式論ヲ書フトキコソナ事柄ニ氣がツカナカツタトハ何タル迂濶ゾヤト言ハレテモ一言モナイ。

3. 日高氏ノ「數値積分法、上卷」ハ近頃ノ名著デアル、自分ノヤウナ素人デモ興味深ク通読スルコトが出来タ、カガ一言シナケレバナラナイコトガアル、ソレハ解析的ノ理論ニ對スル誤解デアル、此ノ書ガ名著デアレバアル程、此ノ書ヲ読ム人が多クナレバナル程、コノ点ヲ明カニシテ置ク必要ガアル。而モコノ誤解タルヤ日高氏ノミニ止マレナイノデアル。理論ト實際ノ分離ニ拍車ヲカケルヤウナ言葉ハ見逃スコトハ出来ナイ。「微分方程式ノ解析的理論モ微分方程式ヲ解クコトガ目的デアル」此ノ點ガハッキリ分レバコノ誤解ハ自然ニ消滅スル。

「我々實際家ノ立場カラ言ヘバ、微分方程式ヲ解ク最終ノ目的ハ多ク解析的ノ解式自身ニアラズシテソノ數値ニアル

コトヲ忘レテハナラナイ、而モ解析的ノ解式カラ數値ヲ計算
スル手數ハ基ダシク面倒ガムシロ始メカラ數値解法ニヨル方
が速ク結果ニ到達スルコトが多い」(77頁) 解式ヲ求メル
コトハ解析的ノ理論デアルカノマウデアル。マサカ「解析
的理論ニ求積法」ト考ヘテ居ラレルノデハナイデアラウガ。
88—90頁ニ於イテ Runge-Kutta 法ノ例ト
シテ

$$x+y \frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = 1$$

ヲ取ツテ積ムシテ居ラレル。然イテ 92 頁ニ移ル、「處デコ
ノ方程式ヲ實際ニ解析的ニ解イテ見ヨウ。(途中ノ計算ヲ
略ス)

$$(x-y) e^{\frac{xy}{x-y}} + 1 = 0$$

が積ムデアル。解析的ニハ正シクコレヲ積ムハ完了シタツケ
デアル」コトが問題デアル。コレヲ求積法ニヨツテ解ケタ
ダケデ解析的ニ解ケタノデハナイ。「併シコレニ依ツテ
コトヲトノ關係ヲハッキリ知ルコトハ困難デアル」ソレコソ
私ノ言ヒタイコトデアル。ソレデカラ解析的理論デモ求積
法ヲ解クコトヲ目標ニシテハ居ナイノデアル。多クノ場合微
分方程式ヲ求積法ヲ解ケナイコトハ周知ノ事實デアル。而モ
運ヨク求積法ヲ解ケテモ、ソレヲケデハ解ノ性質ガムルトハ
言ヘナイ、求積法ガ過去ニ於イテどれ程輝カシイ功績ヲ残シ
タニセヨ、此ノ明カナ事實ヲ無視スルコトハ出来ナイ。コト

ニ於テ求積法ヲ解ケナイマウナー般ノ微分方程式ヲモ解カ
ンガタメニ現ハレタノガ近代ノ微分方程式論デアル、トシタ
ラ求積法ガ微分方程式論ニ於テ占メル位置ハ自ラ了解サ
レルト思フ。

假令コノマウナ病ガアルニシテモ名著ハ矢張り名著デアル、
ソノ下巻ガ現レルノヲ樂ミニシテキル。

4. 数値積分ト解析的理論ト對立サセテ考ヘルノハ間違
ヒデアル。ソノ間ニハツキリシタ境界ガアル筈ハナイ、便宜
上ノ區別デアル。或ハ又數值積分法ハ解析的理論ニ基礎ヲ置
イテキルノダトモイヘヨウ。

Runge-Kutta 法ニセヨ、Adams-Bashforth
法ニセヨ、其ノ他ドノ法ニシテモ次ノ簡單ナ事實カラ出悉シ
テキルノデアル。「微分方程式 $y' = f(x, y)$ ニ於テ
 $f(x, y)$ ガ (x_0, y_0) ノ近傍デ正則ナラバ $y(x_0) = y_0$
ヲ満足スル解ハ唯一ツ存在シ x_0 デ正則デアル」

故ニソノ解ノ $x_0 + h$ ニ於ケル値ハ

$$(1) \quad y = y_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$$

ナル形ニ展開サレル。實際ノ計算ニ於テハコノ級数ノ最初ノ
數項カケヲ取ルノデアル、 h ガ十分ニ小サケレバソレデヨイ
ワケデアル。併シ實際問題トシテソレヲ出來ルカケ速ク求メ
ル必要ガアル。如何ニ理論的ニハ計算出來ル筈カト言ツテモ、
ソノ手数が基カシク面倒デハ實用価値ハナイ。ソコデ計算ノ
方法ニ工夫ヲ要スルノデアル。Runge-Kutta 法其他種々
ナ方法ガ現レルワケデアル。

今 x_0, y_0, h が與ヘラレタトキ、ソレカラ或ル手続=ヨツテ $F(x_0, y_0, h)$ が求メラレルトスル、コレヲ h ノ累級数=展開シタトキソノ係数が (1)ノ係数ト最初ノ数項=於テ一致スルナラバ y ノ値トシテ $F(x_0, y_0, h)$ ヲ取ルコトが出来ル。ソレデアアルカラ x_0, y_0, h カラ出来ルダケ計算シ易イ、而モソノ展開式ノ係数が (1)ノソレト出来ルダケヨク一致スル $F(x_0, y_0, h)$ ヲ求メルコトが實際問題トシテ大切ナノデアアル。

Runge-Kutta 法=於テハ h^4 ノ項マデ完全=一致シテ居ルノデアアル (日高氏, 85頁)。コノヤウ=シテ $x_1 = x_0 + h$ =於ケル y ノ値 y_1 が求マツタナラバ $x_2 = x_1 + h$ =於ケル y ノ値 y_2 ヲ前ノヤウ=シテ求メル、コノヤウ=シテ $b = x_0 + nh$ =於ケル y ノ値が求メラレタトスル、ソノ値ハ $h \rightarrow 0$ ノトキ正シイ $y(b)$ =限リナク近ツク、コレハ証明出来ルが微分方程式論ノ書物=ハ載ツテキナイ、但シ

(2) $F(x_0, y_0, h) = y_0 + f(x_0, y_0)h$ ノ場合ダケハ出テ居ル。ソレガ Cauchy-Lipschitzノ方法デアアル、Cauchy-Lipschitzノ方法ヲ解ノ存在ヲ証明シタラソレダケデ目的ヲ達シタヤウニ他ノ問題ヘト移ツテ行ク。

数学者=ハ微分方程式ノ解が存在スルカ否カトイフコトダケが問題デデモアルカノヤウナ感シヲ實際家=抱カセタトシテモ不思議デハナカラウ。

5. $f(x, y)$ の連続性を仮定スルダケデモ (2) ナラバ h ノ小サクトルコトニヨリ y ノ正シイ値ニ幾ラデモ近イ値ガ求マル。ソウイフ意味ニ於イテ一般性ハアルガ、ソレダケ $f(x, y)$ ガ正則函数トイフマウナ場合ニハ適切デナイノデアアル。

例ヘバ $x=0$ ニ於テ初期條件ガ與ヘラレテ居リ、
 $x=1$ ニ於ケル値ヲ求メルトスル。Runge-Kutta 法ナラバ $h=0.1$ トシテ十分ニ精密ナ値ヲ求メラレルガ (2) ニ依ツテ計算スレバ $h=0.005$ トシナケレバナラナイトスル (假ニ解ヲ h ノ冪級数ニ展開シタトキノ係数が大体 1 ニ等シトスレバ Runge-Kutta 法ニハ誤差ガ粗雑ニ著ヘレバ $h^5=0.00001$, 一方ニ於テ (2) ヲ取レバ $h^2=0.000025$ トナルカラ ソレダケデモ (2) ヲ取ツタ方が精密度ガ落ちルコトノ見當ハツク。

ソノ上ニ繰返ス操作ノ数ガ多イホド誤差ガ何重ニモ重ナツテ來ルカラ精密度ハ益ニ落ちル) 繰返ス操作ノ数ハ (2) ヲ取レバ 200 回ダガ、Runge-Kutta 法ナラバ 10 回デアアル、如何ニ一回ノ操作ハ (2) ノオガ樂デアツテモ全体トシテ見レバ (2) ニヨツテ計算スルヨリ Runge-Kutta 法ノ方が速イコトハ明デアアル。

6. 今 $F(x_0, y_0, h)$ ノ展開式ハ (1) ト h^4 ノ項マデ一致スルトシヨウ、 $f(x, y)$ ガ x, y ニ関シテ四回連続微分可能ナラバ、 y ノ近似値トシテ $F(x_0, y_0, h)$ ヲ取ルコトガ出來ル。

併シソウデナイ場合=無理= $f(x_0, y_0, z)$ ヲ取ツテモヨイ
結果ハ望メナイ所カ計算が無意味トナルカラ 解=収斂シナク
ナツタリスル、ソレデアラカラ 数値積分法ハ主= $f(x, y)$ カ
正則ナ範圍デ使ハレルノデアツテ、ソノ特異点ノ近傍=於テ
使フトキ=ハ十分=注意ヲ要スル。

日高氏ノ書 135—138頁=ハ

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\lambda y}{x(1-x)(1-0.83x^2)}$$

ヲ取ツテ $x=0$ カラ 正ノ方向=Runge-Kutta 法=ヨ
ツテ積分シテ居ル。

驚クベシ $x=0$ ハ右辺ノ 特異点デアアル。併シ幸ナコト
ハソノ解カ $x=0$ デ正則ナノデアアル、ソレデカラ Runge-
Kutta 法ヲ使フコトが出来ルノデアアル。何時デモコンナニ
都合ヨク行クトハ限ラナイ。「只注意スベキハ数値解法ヲ應
用スル=際シ若シ $y = x^\alpha w(x)$ (α ハ常数)ナル形ノ
解ガアルコトガ判ツテ居ルナラバ $y = x^\alpha w(x)$ トシテ原
方程式=代入シテ $w(x)$ = 與スル方程式トシテ 解クベキデ
アル」(日高氏, 139頁)

$y = x^\alpha w(x)$ ($w(x)$ ハ $x=0$ デ正則ナ函数)ナル形
ノ解ノ存在ヲ何=ヨツテ知ルノデアラウカ。数値積分ハ正則
ナ範圍デ使フベキデアアルカラ α ガ正ノ整数デナイ場合=ハ
 $w(x)$ ノ方程式=對シテ数値積分ヲ行フベキデ當然ナ注意デ
ハアルカ、特異点ノ近傍=於テ何時デモ解ガ $y = x^\alpha w(x)$
ナル形=ナルワケデナイカラ 困ル。

$y = w(x^a)$ ナル形ノ解ヲ求メル場合ニハ $pc^a = c^a$ ナ
独立変数ニ取ルベキデアアル。特異点ノ近傍ニ於テ数値積分ヲ
行フ場合ニハソコデドゥイフ形ノ解が存在スルカミ分ツテ居
ナケレバナラナイ。ソレヲ教ヘルノガ解析的理論デアアル。
實際ニハ簡單ナ特異点シカ現ハレナイナラベキデアアルガ將來
決シテ複雑ナ特異点ニ出會フコトハナイト断言出來ル人ハア
レマイ。

解析的理論ハ特異点ヲ如何ニ扱フベキカラ教ヘルデア
アル(勿論ソレガケアハナイ)。ソレデアアルカラドゥイフ場合
ニドゥイフ形ノ解が存在シテ、ソレ以外ノ解ハ存在シナイト
イフコトヲ謂ベルノガ微分方程式論ニ於イテ最も大キナ研究
題目ノ一ツデアアル。

線形微分方程式ノ不確定特異点ニ関スルコノ問題ニ決定
的ノ解決ヲ與ヘタノガ前回紹介シタ *Iryitzinski* ノ論
文デアアル。

ソレデアアルカラソノ研究ヲ本格的ト云フタノデアアル。
併シ線形ナナイ微分方程式ノ場合ニハ、我々ノ理論ハ未ダ幼
稚ナモノデアアル。一階ノ微分方程式ノ場合ガケハ未ダ発表シ
テ居ナイガ可ナリ決定的ナ結論ヲ得タトハイハ、二階ノ場合
ハ殆ンド何ノ見當モツイテ居ナイ。