



Title	有理函数ノ二三ノ性質
Author(s)	丸山, 俊朗
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 117, p. 16-22
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74455
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

530. 有理函数ノ二三ノ性質

丸山 俊朗 (東京文理大學生)

§1. 有理函数ヲ

$$(1) \quad R(x) = \frac{P_{\mu}(x)}{Q_{\nu}(x)}$$

トスルトキ, $\lambda = \max(\mu, \nu)$ ヲ $R(x)$ ノ 次数 ト呼バ,
但シ P_{μ}, Q_{ν} ハ夫々 μ, ν 次; x ノ多項式デ, 互ニ素ガ
アルトスル。 $R(x)$ ガ λ 次ノ有理函数ナラバ, 有限又ハ
無限ナル任意ノ常数各ニ対シテ方程式

$$(2) \quad R(x) = \text{各}$$

ノ有限根ノ数 (但シ各根ハ重複度ガケ数ヘル) ハ一般ニ λ
デアアル。 λ ヨリトナルトキ, ソノ各ヲ R ノ 除外値 ト呼バ。
有理函数ハ常ニ唯一ツノ除外値ヲ有スル; 即チ $\mu < \nu$
ナルニ從ツテ夫々

$$\text{各} = 0, \frac{P_{\mu}(\infty)}{Q_{\nu}(\infty)}, \infty$$

ガソノ除外値デアアル。

方程式 (2) ガ少クトモ一ツノ重複根ヲ有スルトキ, 各ヲ
 $R(x)$ ノ重複値ト呼ビ, 又 (2) ガ重複根ノミヲ有スルトキ,
各ヲ $R(x)$ ノ 完全重複値 *valeur complètement mul-*
tiple ト呼バ。

有理函数ニ関シテ次ノ基礎定理ガ成立スル:

定理 I $R(x)$ ヲ常数ナラザル λ 次ノ有理函数トス

レバ、方程式

$$(3) \quad R(x) = \sum_k (k=1, 2, \dots, n)$$

ノ相異ナル有限根ノ数ノ和ハ $(n-2)\lambda + 1$ ヨリ小ナラズ、
但シ $\sum_k$ ハ相異ナル n 個ノ数 (有限又ハ無限ナル) トスル。

証明: $R(x)$ ヲ (1) ノ形ヲ表ハシ、 $\mu < \nu = \lambda$ ナル場
合ニツイテ証明スル。他ノ場合モ同様デアアル。ナホ $R(x)$ ガ
常数ナラズトノ假定カラ $\lambda \geq 1$ 、從ツテ定理ハ $n=1$ ノト
キ明カニ成立スル。故ニ $n \geq 2$ トシテ差支ナイ。

名ヲ R ノ除外値トスレバ、方程式 (3) ノ有限根ノ数 (各
根ハソノ重複度ガケ数ヘル) ノ和ハ $(n-1)\lambda + \mu$ デアル。

ソノ中ノ重複根ヲ $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ トシ、ソノ重複ノ次数ヲ
夫々 $m_1, \dots, m_j$ トスレバ、 $R'(x) = \frac{d}{dx} R(x)$ ノ必要
ニ相當スル多項式 $P'_\mu(x) Q_\nu(x) - P_\mu(x) Q'_\nu(x)$ ハ

$\prod_{k=1}^j (x - \alpha_k)^{m_k-1}$ ヲ因數トスル。然ルニコノ多項式ハ $\mu + \nu - 1$

次デアアルカラ、明カニ

$$\mu + \nu - 1 \geq \sum_{k=1}^j (m_k - 1)$$

從ツテ (3) ノ相異ナル有限根ノ数ノ和ヲ N トスレバ

$$\begin{aligned} N &= (n-1)\lambda + \mu - \sum_{k=1}^j (m_k - 1) \geq (n-1)\lambda + \mu - (\mu + \nu - 1) \\ &= (n-2)\lambda + 1 \end{aligned}$$

$\sum_k$ ノ中ニ除外値ガナケレバ

$$N = n\lambda - \sum_1^f (m_k - 1) \geq n\lambda - (\mu + \nu - 1) \\ = (n-1)\lambda + 1 - \mu > (n-2)\lambda + 1$$

証明終り。

ナホ、 Σ_k ノ中ニ除外値カナイトキノ N ノ値ハ

1° $\mu \neq \nu$ ナル場合ニハ

$$(4) \quad N \geq (n-1)\lambda + 1 - \lambda_1, \quad \lambda_1 = \min(\mu, \nu);$$

2° $\mu = \nu = \lambda$ ナル場合ニハ

$$\frac{P_\mu}{Q_\nu} = \Sigma_0 + \frac{P_{\mu'}}{Q_\nu}$$

$$\text{但シ} \quad \Sigma_0 = \frac{P_{\mu(\infty)}}{Q_{\nu(\infty)}}, \quad \text{從ツテ} \quad \mu' < \lambda$$

トオクコトニヨリ

$$N \geq (n-1)\lambda + 1 - \mu'$$

ナル關係ヲ満足スル。

定理1ニ於イテ、方程式(3)ノ根ヲ有限ナル根ニ限ラナケレバ、次ノ如クニ述ベルコトガ出來ル。

定理1* $R(x)$ ヲ常數ナラザル λ 次ノ有理函數トスレバ、方程式(3)ノ相異ナル根(有限又ハ無限ナル)ノ數ノ和ハ $(n-2)\lambda + 2$ ヨリ小ナラズ、但シ Σ_k ハ相異ナル n 個ノ數(有限又ハ無限ナル)デアアル。

Σ_k ノ中ニ除外値ガアレバ(3)ノ根ニ ∞ ガ参加スル。又 Σ_k ノ中ニ除外値カナケレバ上ノ考察ニヨリ、根ハ凡ヤテ有限根デアアルケレドモ、ソノ相異ナルモノノ總數ハ $(n-2)\lambda + 1$

ヨリ大ナル。故ニ定理ハ成立スル。

(但シコノ定理ハ後ニ使用スルコトナシ)

有理函数ハ特ニ多項式トナル場合、即チ $\lambda = \mu, \nu = 0$ ナル場合ニハ、 $\alpha = \infty$ ノミガ除外値トナリ、且ツ $\lambda_1 = \min(\mu, \nu) = 0$ デアレカラ、(4)ヲ参照スルコトニヨリ;

定理 1' $P(x)$ ヲ常數ナラザル入次ノ多項式トスレバ、方程式

$$P(x) = \alpha_K \quad (K = 1, 2, \dots, n)$$

ノ相異ナル根ノ數ノ和ハ $(n-1)\lambda + 1$ ヨリ小ナラズ、但シ α_K ハ相異ナル n 個ノ有限數トスル。

§2. 定理 1' ヨリ直チニ次ノ一致ノ定理 *Théorème d'unicité* ガ得ラレル。

定理 2 (一致ノ定理) 常數ナラザルニツノ多項式 $P(x)$, $Q(x)$ アリ、方程式

$$P(x) = \alpha_K, Q(x) = \alpha_K \quad (K = 1, 2)$$

ガ常ニ同一ノ x ニヨツテノミ満足サレルナラバ

$$P(x) \equiv Q(x)$$

但シ α_1, α_2 ハ相異ナルニツノ有限數

証明: 上ノ二組ノ方程式ノ相異ナル根ヲ $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ トスル、定理 1' ヲ $n=2$ ニ關シテ利用スレバ、 P, Q ノ次數ハイッレモ l ヲ越ヘナイコトガ分ル。而シテ l 次ヲ越エザル多項式 $P-Q$ ガ相異ナル $l+1$ 個ノ有限數 α_K ニ於イテ零トナルカラ $P-Q \equiv 0$, 即チ $P \equiv Q$

定理3 (重複値 = 関スル定理)

多項式ノ完全重複値 (有限) ノ数ハ1ヲ越ヘナイ。
若シニツノ有限ナル完全重複値 a, b が存在スルナ
ラバ, 方程式

$$P(x) = a, P(x) = b$$

ノ相異ナル有限根ノ数ノ和が l 以下トナリ, 定理1' =
反スル。

一般ナル有理函数ニツイテハ定理1ヲ適用スレバ
ヨイ。

定理4 (一致ノ定理) ニツノ有理函数 $R_1(x), R_2(x)$
が常数ナラズシテ, 方程式

$$R_1(x) = \alpha_k, R_2(x) = \alpha_k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

ノ有限根が常ニ共通根デアルナラバ,

$$R_1(x) \equiv R_2(x)$$

但シ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ハ相異ナル有限又ハ無限数トスル。

証明: 上ノ方程式ノ相異ナル有限根ヲ $x_1, \dots, x_{l+1}$
トシ, 定理1ヲ $n=4$ トシテ利用スレバ, R_1, R_2 ノ次数
ハ $l/2$ ヲ越ヘナイ。故ニ今 R_1, R_2 ヲ (I) ノ形デ表ハレ

$$R_1(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad R_2(x) = \frac{\bar{P}(x)}{\bar{Q}(x)}$$

トスレバ, $P, Q, \bar{P}, \bar{Q}$ ハイツレモ $l/2$ 次以下, 多項式デア
ル。依ツテ $P(x)\bar{Q}(x) - \bar{P}(x)Q(x)$ ノ次数ハ l ヲ越ヘ
ナイ。然ルニコレハ相異ナル $l+1$ 個ノ有限点 x_k = 於イテ
零トナルカラ, コノ多項式 $\equiv 0$, 即チ $R_1 \equiv R_2$ 。

コノ定理=於ケル ∞ ノ数 4 ハコレヨリ小ナル数ヲ以テ置換ヘルコトが出来ナイ。實際, ニツノ有理函数

$$R_1(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}, \quad R_2(x) = \frac{2x}{x+1}$$

ハ同一ノ有限点=於テ $0, \infty, 1$ ナル値ヲトルケレドモ $R_1 \neq R_2$ ナアル。

定理5. (重複値=関スル定理)

有理函数ノ完全重複値ノ数ハ3ヲ越ヘナイ。

何トナラバ, 完全重複値ハ4個アリトシ, コレヲ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ トスレバ, 方程式 $R(x) = \alpha_K$ ($K=1, 2, 3, 4$) ノ相異なる有限根ノ数ハ2以下トナラネバナラナイ、コレハ定理ノ矛盾スル。上ノ完全重複値ノ数 3 ハコレヨリ小ナル数ヲ以テ置換ヘルコトが出来ナイ。實際, 有理函数

$$R(x) = \frac{-4x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

ハニツノ完全重複値 $0, 1, \infty$ ヲ有スル。

(注意1) 有理型函数=関スル一致ノ定理及ビ完全重複値ノ数=就イテハ

R. Nevanlinna: Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (1929)

ヲ参照サレタイ。

(注意2) 上記ノ書物中=アル第二基礎定理 *second théorème fondamental* ハ有理函数=関シテハ

$$(g-2)T(r) + \log r \leq \sum_1^g N(r, z_k) - N_1(r) + O(1)$$

$$\leq \sum_1^g \overline{N}(r, z_k) + O(1)$$

トナル。定理 I ハコレヨリ直チ=導カレル。前述ノ定理 I
ノ初等的証明ハ掛谷先生ノ御教示=ヨル。(1936, 12, 9)