



Title	函数方程式 $f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z)$ 二就イテ, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 118, p. 1-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74457
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

532. 函数方程式

$$f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z) \\ \text{ニ就イテ, II}$$

角 谷 静 夫 (阪大)

次 $= (x, y)$ + ル 實數, pair ヲ考ヘ

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x+x'+f(y, y'), y+y')$$

= ヨツテ (x, y) ト (x', y') トノ和 $(x, y) \oplus (x', y')$ ヲ定
義スル。 (x, y) 全体ガコノ $\oplus$ = ヨツテ *abelian group*
ヲ作ツテキルコトガ容易ニワカル。即チ

$$f(y, y') = f(y', y)$$

ヨリ

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y)$$

ヲ得。

$$f(y, y') + f(y+y', y'') = f(y, y'+y'') + f(y', y'')$$

ヨリ

$$((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'') = (x, y) \oplus ((x', y') \oplus (x'', y''))$$

ヲ得ル。 $(0, 0)$ ハ *group* ノ單位元ヲ (x, y) ノ *inverse*
ハ $(-x + f(y, -y), -y)$ ヲアル。

コノ *abelian group* $\mathcal{G}$ トスレバ $\mathcal{G}$ ハ明カニ
次元ヲ *separable, locally compact, locally con-*
nected ナリ $\mathcal{G}$ *connected* ナルカラ *Pontrjagin* ノ
定理ニヨリ

Vector group ト *torsional group* ト, *direct*

product = topologically isomorphic デアル。然ルニ O_f が compact + subgroup ヲ含マナイコトハ明カデアルガラ O_f ハ Euclid 空間 (今ノ場合ハ二次元) , addition 1 group ト topologically isomorphic デアル。

依ツテ適當ニ座標ノ変換 T ヲホドコセバ之レハ addition 1 group トナラネハナラヌ。

$$T(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

トオケバ

$$P(x, y) + P(x', y') = P(x + x' + f(y, y'), y + y') \text{ ----- (10)}$$

$$Q(x, y) + Q(x', y') = Q(x + x' + f(y, y'), y + y')$$

ガ成立シナケレバナラナイ。

$$(10) = \text{於テ } y' = 0 \text{ トオケバ } f(y, 0) = 0 \text{ ヲリ}$$

$$P(x, y) + P(x', 0) = P(x + x', y) \text{ ----- (11)}$$

$$\text{更ニ (11) = 於テ } y = 0 \text{ トオケバ}$$

$$P(x, 0) + P(x', 0) = P(x + x', 0)$$

コノヨリ $P(x, 0)$ が x = 関シテ 連続ナルコトヲ用フレバ

$$P(x, 0) = cx \text{ ----- (12)}$$

トナル。 (11) = 於テ $x = 0$ トオキ (12) ヲ代入シテ x' ノ代リ = x ト書ケバ。

$$P(x, y) = cx + P(0, y)$$

トナル。コレヲ (10) = 代入スレバ

$$P(0, y) + P(0, y') = cf(y, y') + P(0, y + y')$$

又ハ

$$f(y, y') = -\frac{1}{c} \{P(0, y+y') - P(0, y) - P(0, y')\}$$

故ニ $g(y) = -\frac{1}{c} P(0, y)$ トオケバ

$$f(y, y') = g(y+y') - g(y) - g(y')$$

ヲ得ル。

上記ノコトハ $f(x, y)$ ノ変域 R が實數全体デナクテ一般、 n 次元空間 R_n デアル場合デモ、 $f(x, y)$ が $x, y =$ 関シテ對稱デ函数方程式 (1) ヲ満足シテ居レバ成立スル。

(x, y) ヲ考ヘルトキニ x ヲ實數、 y ヲ R_n ノ element トスレバヨイ。

シカシ R が實數全体ノ場合ニハ、コレハ continuous group ノ理論ヲ用ヒナクテモ直接ニ次ノ如クスレバ得ラレル。

今

$$f(y, y') = g(y+y') - g(y) - g(y') \dots\dots\dots (13)$$

ヲ満足スル如キ $g(y)$ が存在スルモノト見當ヲツケ、コノ $g(y)$ ヲ逆ニ $f(y, y')$ ヲ用ヒテ定義シテ行ク。

先ヅ $g(y)$ が solution デアレバ $g(y) + cy$ (c : constant) モ亦 solution デアルコトハ明ラカデアルカラ $g(1)$ ハ任意ニ定メルコトが出来ル。

依ツテ

$$g(1) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

トオク。次ニ

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{-----}(15)$$

トオク。コレハ $y = y' = \frac{1}{2}$ ナルトキ (13) が成立スルヤウ
ニシタノデアアル。

更ニ

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

一般ニ

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) &= -\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right) \\ &\text{-----} \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) \text{-----}(16)\end{aligned}$$

トオク。コレヲハ何レモ $y = y' = \frac{1}{2^n}$ ナルトキニ (13) が成
立スルヤウニシタノデアアル。

次ニ

$$\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right)$$

$$k=1, 2, \text{-----}, 2^{n-1}-1; n=1, 2, \text{-----}$$

ニヨツテ $\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ ナ順次定義シテ行ケバ、 $\varphi(r)$ ハ
*birrational number*ニ對シテ定義サレソノ範圍ニ於イテ

$$\varphi(r_1, r_2) - \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = f(r_1, r_2) \text{-----}(17)$$

ヲ満足シテキル。コノコトハ歸納法ヲ用ヒテ証明スルコトが
出來ルガ

$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + f(y, y'), y + y')$
 $\Rightarrow$ ツテ addition を定義サレタ group = 於テ

$$\xi\left(\frac{1}{2^n}\right) \equiv \left(\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right), \frac{1}{2^n}\right)$$

が $(0, 1)$ ナル element, 2^n 乗根デアリ

$$\xi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \xi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \oplus \xi\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$\Rightarrow$ ツテ $\xi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ が定義サレテ居リ, 且ツ (17) が

$$\xi(r_1 + r_2) = \xi(r_1) \oplus \xi(r_2)$$

ト equivalent デアルコトヲ考ヘレバ容易ニワカル。

ヨツテ此ノ如ク birational number r = 對シテ
 定義サレタ $\varphi(r)$ が real number 全体ニ連続ニ拡張出來
 ルコトヲ証明スレバヨイ。

コノタメニハ $0 \leq r \leq 1$ ナル birational number
 ノ範圍デ定義サレタ函数 $\varphi(r)$ がソコニ一様連続ナルコト
 ヲ示セバ十分デアル。

然ルニ

$$\varphi(r+h) - \varphi(r) = f(r, h) + g(h)$$

デ $f(r, h)$ ハ r が有界ナルトキ $h \rightarrow 0$ ト共ニ一様ニ 0 ト
 ナルカラ ($f(r, h)$ ハ r, h ノ連続函数デ $f(r, 0) = 0$ デ
 アル) コレヲ示スタメニハ $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ が、 h が bi-
 rational number ヲ通ツテ行クトキニ成立スルコト
 ヲ示セバ十分デアル。

今 $f(y, y')$ ハ $(0, 0) =$ 於イテ連続デ $f(0, 0) = 0$

デアルカテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) = 0$$

ナルコトハ明カデア。ヨツテ (16) ヨリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 \text{ ----- (18)}$$

ナルコトモ明カデア。故ニ若シ

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \quad r: \text{birational}$$

カ成立シナイトスレバ

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} g(r_n) = a \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \end{array} \right\} \text{----- (19)}$$

ナル birational number 1 系列 $\{y_n\}$ が存在スル。

$a > 0$ ト仮定シテモ一般性ヲ失ハナイ。 ($a < 0$ ナラバ f, g ノ附号ヲ全部逆ニスレバヨイ)

(18), (19) ヨリ、 $\{y_n\}$ ノウチニ少クトモ一ツノ y_0 が存在シテ

$$\frac{1}{2^n} < y_0 < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad g(y_0) > \frac{a}{2}, \quad g\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{a}{4},$$

$$g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) < \frac{a}{4} \text{----- (20)}$$

カ成立スルコトガワカル。シカモ n ヲ十分大キク取ツテ

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad |y| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ \text{ナルトキ} = \text{ハ} \\ |f(x, y)| < \frac{a}{8} \end{array} \right\} \text{----- (21)}$$

が成立スルヤウニ出来ル。

$$y_0 = \frac{k}{2^{m+n}}, \quad 2^m < k < 2^{m+1}$$

トオキ、 p, q ヲ夫々

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{i}{2^{m+n}}\right) > \frac{a}{2}, \quad i = k-1, k-2, \dots, p+1 \\ \varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) \leq \frac{a}{4} \\ \varphi\left(\frac{j}{2^{m+n}}\right) > \frac{a}{2}, \quad j = k+1, k+2, \dots, q-1 \\ \varphi\left(\frac{q}{2^{m+n}}\right) \leq \frac{a}{4} \end{array} \right\} \text{----- (22)}$$

ナリ如ク取ルコトが出来ル。シカモ

$$2^m \leq p < k < q \leq 2^{m+1}$$

デアル。今

$$\Phi(t) \equiv f\left(t, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right) + \varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right) \text{----- (23)}$$

トオケバ、コレハ t ノ連続函数デ (17), (22) ヲ用フレバ

$$\Phi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{m+n}}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) > \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} > 0$$

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{p+(q-k)}{2^{m+n}}\right) &= \varphi\left(\frac{q}{2^{m+n}}\right) - \varphi\left(\frac{p+(q-k)}{2^{m+n}}\right) \\ &\leq \frac{a}{4} - \frac{a}{2} < 0\end{aligned}$$

トナルカラ

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \frac{p}{2^{m+n}} < t_0 < \frac{p+(q-k)}{2^{m+n}} < \frac{q}{2^{m+n}}$$

ナル t_0 が存在スル。コノ t_0 是對シテ (23) ヨリ

$$\varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right) = -f\left(t_0, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right)$$

が成立スル。コレヲ用ヒルト

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{k}{2^{m+n}}\right) &= f\left(\frac{p}{2^{m+n}}, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right) + \varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right) + \varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{2^{m+n}}, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right) - f\left(t_0, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right) + \varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right)\end{aligned}$$

然ルニ

$$\left|\frac{p}{2^{m+n}}\right|, \left|\frac{k-p}{2^{m+n}}\right|, |t_0|, \leq \frac{q}{2^{m+n}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

デアナルカラ (21) ヨリ

$$\left|f\left(\frac{p}{2^{m+n}}, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right)\right|, \left|f\left(t_0, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right)\right| < \frac{a}{8}$$

デアリ、又 (22) ヨリ

$$\varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) \leq \frac{a}{4}$$

デアナルカラ

$$\varphi(y_0) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n+n}}\right) < \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$$

コレハ (20) = 矛盾スル。 ヨツテ $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = 0$ ナケレ
 バナラヌ。