



Title	函数方程式 $f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z)$ 二就イテ, III
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 119, p. 10-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74463
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

538. 函数方程式

$$f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z) \\ = \text{就イテ。III}$$

角 谷 静 夫 (阪大)

次 $= \mathbb{R}$ が n 次元 Euclid 空間ナル場合ヲ考ヘル。

$f(x, y)$ が x, y = 関シテ對稱デアレバ止ニ述ヘタ如ク

$$f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, z) \text{----- (I)}$$

ヲ満足スルモノハ

$$f(x, y) = \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) \text{ ----- (3)}$$

ニ限ルコトガワカル。然ルニ一般ノ $f(x, y)$ ハ

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \{f(x, y) + f(y, x)\} + \frac{1}{2} \{f(x, y) - f(y, x)\} \\ &\equiv f_1(x, y) + f_2(x, y) \end{aligned}$$

トオケバ

$$f_1(x, y) = f_1(y, x)$$

$$f_2(x, y) = -f_2(y, x)$$

トナリ又 (1) = 於テ x ト z トヲ 入レカヘテ 右辺ト左辺トヲ 入レカヘレバ

$$f(y, x) + f(z, x+y) = f(y+z, x) + f(z, y) \text{ ----- (24)}$$

トナルカラ $\frac{1}{2} \{(1) + (24)\}$ 及ビ $\frac{1}{2} \{(1) - (24)\}$ ヲ作ルコトニ ヱツテ

$$f_1(x, y) + f_1(x+y, z) = f_1(x, y+z) + f_1(y, z)$$

$$f_2(x, y) + f_2(x+y, z) = f_2(x, y+z) + f_2(y, z)$$

ヲ得ル。即チ f_1, f_2 ハ何レモ (1) ヲ満足スル。故ニ f_1 ノ方ハ既ニ知レタ如ク (3) ノ形ヲモツコトガワカル。ヨツテ結局 (3) ヲ條件

$$f(x, y) + f(y, x) = 0 \text{ ----- (25)}$$

ノ下デ解クコトニナル。

先ヅ (1) = 於テ $z = x$ トオキ、(25) ヲ用フレバ

$$f(x, y) = f(x, x+y) \text{ ----- (26)}$$

ヲ得ル。コレヨリ (25) ヲ用フレバ

$$f(x, y) = f(x+y, y) \text{ ----- (27)}$$

ヲ得ル。

次 = (1) = 於テ $y = x$ トオケバ $f(x, x) = 0$ ナルコ
トヨリ

$$\begin{aligned} f(2x, z) &= f(x, x+z) + f(x, z) \\ &= 2f(x, z) \quad [(26) = \text{ヨル}] \end{aligned}$$

ヲ得ル。一般ニ

$$f(mx, z) = mf(x, z) \quad (m \text{ハ正整数}) \dots (28)$$

デアレバ (1) = 於テ $y = mx$ トオクコト = ヨリ

$$f(x, mx) + f((m+1)x, z) = f(x, mx+z) + mf(x, z)$$

然ルニ (26) ヲ m 回繰返ヘシテ用フレバ

$$f(x, mx) = f(x, 0) = 0$$

$$f(x, mx+z) = f(x, z)$$

デアルカラ、コレハ

$$\begin{aligned} f((m+1)x, z) &= f(x, z) + mf(x, z) \\ &= (m+1)f(x, z) \end{aligned}$$

ヨツテ (28) ハ任意ノ正整数 m = 對シテ成立スル。

更ニ (1) = 於テ $y = -x$ トオケバ

$$\begin{aligned} f(x, -x) &= f(x, -x+z) + f(-x, z) \\ &= f(x, z) + f(-x, z) \quad [(26) = \text{ヨル}] \end{aligned}$$

然ルニ左辺 = (26) ヲホドコセバ

$$f(x, -x) = f(x, 0) = 0$$

デアルカラ、結局

$$f(-x, z) = -f(x, z)$$

ヲ得ル。コレト (28) ト $f(x, z)$ ノ連続性トヲ用フレバ、

任意ノ實數 a (正, 0 又ハ負) = 對シテ

$$f(ax, y) = af(x, y) \text{ ----- (29)}$$

ナルコトガワカル。コレヨリ

$$f(x, ay) = af(x, y) \text{ ----- (30)}$$

ニ直チニ得ラレル。

n 次元空間 R_n ノ点ヲ

$$x = (x_1, x_2, \text{-----}, x_n) = (x_1, x_1^*)$$

$$y = (y_1, y_2, \text{-----}, y_n) = (y_1, y_1^*)$$

トスレバ x_1^*, y_1^* ハ $(n-1)$ 次元空間 R_{n-1} ノ点ト考ヘル
コトガ出來ル。

(29), (30) ヲ用フレバ

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x_1 \cdot y_1 \cdot f\left(\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \text{-----}, \frac{x_n}{x_1}\right), \left(1, \frac{y_2}{y_1}, \text{-----}, \frac{y_n}{y_1}\right)\right) \\ &= x_1 y_1 f\left(\left(1, \frac{x_1^*}{x_1}\right), \left(1, \frac{y_1^*}{y_1}\right)\right) \end{aligned}$$

トナルカラ

$$f(1, P), (1, Q)) \equiv g(P, Q) \text{ ----- (31)}$$

(但シ P, Q ハ 共ニ R_{n-1} ノ点)
ヲ表ハスモノトス

トオケバ

$$f(x, y) = x_1 y_1 g\left(\frac{x_1^*}{x_1}, \frac{x_2^*}{x_2}\right)$$

トナル。次ニ $g(P, Q)$ ノ性質ヲシラベル。

(a) $g(P, Q)$ ハ P, Q ガ R_{n-1} 内ノ直線 l ノ上ヲ動ク
トキ $\overrightarrow{PQ}$ ノ長サ $L(\overrightarrow{PQ})$ (方向ニ考ヘニ入レテ) = 比例ス

ル。即チ

$$g(P, Q) = k(l) \cdot L(\overrightarrow{PQ})$$

証明. P, Q, R が R_{n-1} 内ノ一直線上ニアルモノトスル。

$$L(\overrightarrow{PR}) : L(\overrightarrow{RQ}) = \mu : \lambda, \lambda + \mu = 1$$

トオク。

$$\begin{aligned} g(P, Q) &= f((1, P), (1, Q)) = \frac{1}{\lambda\mu} f((\lambda, \lambda P), (\mu, \mu Q)) \\ &= \frac{1}{\lambda\mu} f((\lambda, \lambda P), (\lambda + \mu, \lambda P + \mu Q)) \quad [(2b) = \exists l] \\ &= \frac{1}{\mu} f((1, P), (1, \lambda P + \mu Q)) = \frac{1}{\mu} g(P, R) \end{aligned}$$

即チ

$$\mu \cdot g(P, Q) = g(P, R)$$

同様ニ (27) ヲ用フレバ

$$\lambda \cdot g(P, Q) = g(R, Q)$$

ヲ得ル。コレヨリ一般ニ P, Q, P', Q' が一直線上ニアルバ

$$g(P, Q) = \frac{L(\overrightarrow{PQ})}{L(\overrightarrow{P'Q'})} \cdot g(P, Q')$$

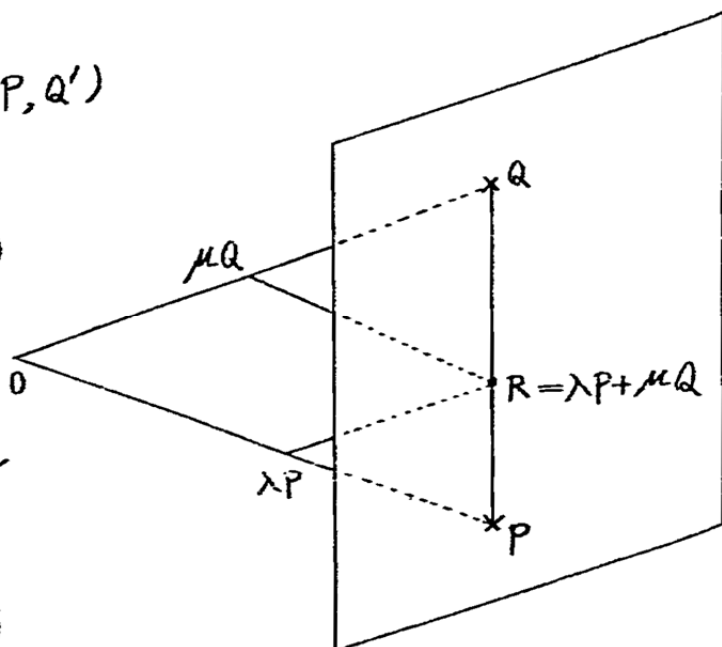
$$= \frac{L(\overrightarrow{PQ})}{L(\overrightarrow{P'Q'})} \cdot g(P', Q')$$

ヲ得ル。

(b) R_{n-1} 内ニアル
二次元ノ平面 π ヲトリ
 π 上ニ底辺ヲ共有シテ高
サノ等シイニツノ三角形

$$PQR, PQ'R$$

ヲ取レバ



$$g(P, Q) + g(Q, R) = g(P, Q') + g(Q', R) \text{----- (32)}$$

が成立スル。

証明:

$PQ \perp RQ'$ トノ交ハリヲ Q''
トスル。

$$PQ : QQ'' = RQ' : Q'Q'' \\ = \mu : \lambda$$

トオケ。 R_π 内ノ三點

$$(\lambda, \lambda P), (\mu, \mu Q'')$$

$$(\lambda, \lambda R)$$

ヲ考ヘ、コレヲ π 外ニト

考ヘテ (1) = 代入スレバ f ノ性質 (29)(30) 及ビ g ノ定義 (31) ヨリ

$$\lambda \mu g(P, Q'') + \lambda g(\lambda P + \mu Q'', R) \\ = \lambda g(P, \mu Q'' + \lambda R) + \lambda \mu g(Q'', R)$$

然ルニ $(a) =$ ヲツテ知ル如ク

$$\mu g(P, Q'') = g(P, Q), \mu g(Q'', R) = g(Q', R)$$

デアルカラコレヨリ (32) ヲ得ル。 (証明終)

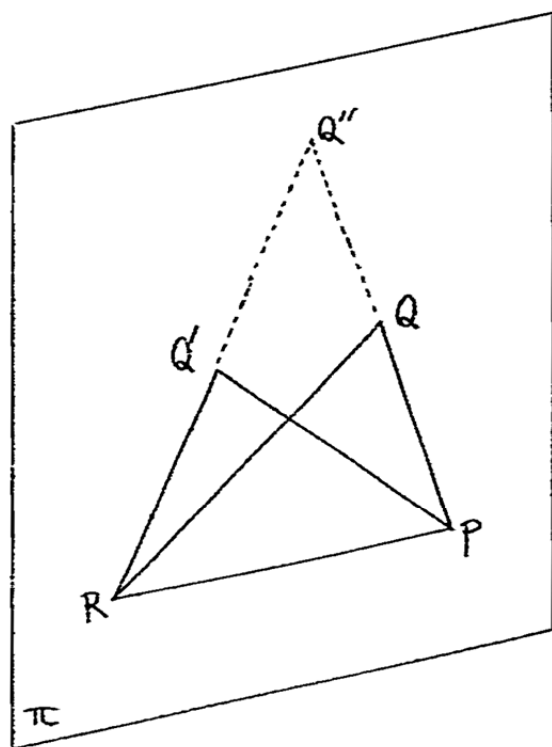
(C) π 上ニアル三角形 PQR = 對シテ

$$\delta_B(\Delta) = g(P, Q) + g(Q, R) + g(R, P)$$

トオケ、 $\delta_B(\Delta)$ ハ Δ ノ面積ニ比例スル。即チ

$$\delta_B(\Delta) = C(\pi) \cdot A(\Delta) \text{----- (33)}$$

但シ $A(\Delta)$ ハ Δ ノ面積、 $C(\pi)$ ハ π ノミニ $depend$ スル常數デアル。シカラ $\overrightarrow{PQR}$ ハ一定ノ方向ニマハルモノトスル。



証明: 先づ (b) より、底辺ヲ共通シテ高サノ等シイニツノ三角形 $\Delta, \Delta' =$ 對シテハ $\Omega(\Delta) = \Omega(\Delta')$ デアル。然ルニ一ツノ平面 π 上ノ面積ノ等シイニツノ三角形 Δ, Δ' ハ適當ニ有限個ノ三角形 $\Delta_0 = \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n = \Delta'$ ヲ撰ンデ Δ_i ト Δ_{i+1} ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$) が一辺ヲ共通シテソノ辺ニ對スル高サガ等シイ様ニスルコトが出来ル^{*}カラ任意ノ面積ノ等シイニツノ三角形 $\Delta, \Delta' =$ 對シテ $\Omega(\Delta) = \Omega(\Delta')$ デアル。

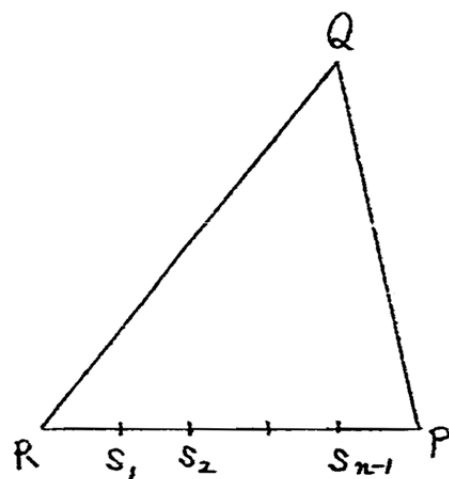
次ニ ΔPQR ノ底辺 RP ヲ
 $S_0 = R, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n = P$
 ニヨツテ n 等分スレバ

$$\Omega(PQR) = \sum_{i=0}^{n-1} \Omega(S_{i+1}QS_i)$$

トナリ $A(S_{i+1}QS_i)$ ハ何レモ等

シイカラ $\Omega(S_{i+1}QS_i)$ ハ何レモ等シイ。故ニ

$$\Omega(PQR) = n\Omega(S_1QR).$$



*. ニツノ三角形 Δ, Δ' が一辺ヲ共通シテソノ共通辺ニ對スル高サガ等シイトキ $\Delta \sim \Delta'$ デアルトシ $\Delta \sim \Delta', \Delta' \sim \Delta''$ ナラバ $\Delta \sim \Delta''$ デアルト假定スレバ面積ガ等シイニツノ三角形 Δ, Δ' ハ $\Delta \sim \Delta'$ デアル。

$$nA(S_1QR) = A(PQR) \text{ デアルカラ}$$

$$A(\Delta) = nA(\Delta')$$

ナルトキハ

$$\Omega(\Delta) = n \Omega(\Delta')$$

ヲ得ル。 $\Omega(\Delta)$ が $A(\Delta) \rightarrow 0$ ナルトキ $\rightarrow 0$ ナルコト

ハ容易 = ヲカルカラ、コレヨリイツモノ様 = シテ

$$\Omega(\Delta) = c(\pi) \cdot A(\Delta) \text{ ----- (33)}$$

ヲ得ル。(証明終)