



Title	Nulldimensionaler Kompaktum ノ Abbildungstheorie (其ノ一)
Author(s)	中澤, 武雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 121, p. 43-53
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74469
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

544. Nulldimensionaler Kompaktum, Abbildungstheorie (其1-)

中 澤 武 雄 (東京文理大)

Nulldimensionaler Kompaktum, Abbildungstheorie = 就イテウシバカリマツテ見タコトヲ述ベサセテ頂キタク思ヒマス。談ハ大塚数学会誌第五卷第一号ノ拙文 Projektionspektrum ト Kompaktum, 第五章 Abzählbarer Kompaktum ノ続キデアリマスガコノダケデモ完全ナ文章ニナツテ居リマス。

I. Vorbereitung

1. Nulldimensionaler Kompaktum

in sich kompakt デ Metrik ヲモツテル位相集合ヲ Kompaktum ト云ヒソレガ nulldimensional, トキ nulldimensionaler Kompaktum トイフ。コノニ云フ次元ハ Alexandroff 流ノ次元デアイル。

2. 導来集合

$\mathcal{F}$ ヲ nulldimensionaler Kompaktum トスル。

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)}$ トスル。 $\mathcal{F}^{(0)}$ カラ孤立点ヲ除キ去ルト開集合ガ残ル。之レヲ $\mathcal{F}^{(1)}$ トスル。順序数 $\alpha =$ 對シテ $\alpha > \beta$ ナル然テ、 $\beta =$ 對シテ $\mathcal{F}^{(\beta)}$ ガ定義サレテキルトキ (i) α ガ孤立順序数ナラバ $\mathcal{F}^{(\alpha-1)}$ カラソノ孤立点ヲ除去シタ集合ヲ $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ トシ (ii) α ガ極限順序数ナラバ $\bigcap_{\beta < \alpha} \mathcal{F}^{(\beta)} = \mathcal{F}^{(\alpha)}$ トスル。然ラバ空ナラサル $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ ハ nulldimensionaler Kompaktum デ $\alpha < \beta$ ナル $\alpha, \beta =$ 對シテハ $\mathcal{F}^{(\alpha)} \supset \mathcal{F}^{(\beta)}$

である。 $\mathcal{F}^{(\omega)}$ / コトヲ $\mathcal{F}$ / ω 次ノ導來集合ト呼ブ。

3. ε -ausgezeichnete Umgebung

M ヲ $\mathcal{F}$ = 於ケル閉部分集合トスル。與ヘラレタ任意ノ ε = 對シテ $Nerve$ / 次元ガ 0 ナル如キ $\mathcal{F}$ / ε -Überdeckungガ存在スル。ソノ System ヲ $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_i, \dots, \mathcal{F}_s$ トスルトキ M ト nicht fremd + $\mathcal{F}_i$ ノ和ヲ $U(M)$ トスルト,
 $U(M)$ ト $\mathcal{F} - U(M)$ ハ互ニ相離レタ閉集合ニナル。シカモ $U(M) \subset S(M, \varepsilon)$ 。コノ $U(M)$ / コトヲ $\mathcal{F}$ = 關スル M / ε -ausgezeichnete Umgebung ト呼ブ。

4. Kern

$\mathcal{F}$ / in sich dicht + 部分集合ヲ D トスルト $\bar{D}$ = 亦 in sich dicht である。從ツテ $\mathcal{F}$ / 總テ in sich dicht + 部分集合ノ和ヲ K トスレバ K ハ $\mathcal{F}$ = 於ケル最大ノ perfekt + 部分集合ニナル。コノ K ヲ $\mathcal{F}$ / Kern 核ト呼ブ。 $\mathcal{F}$ ハ核ヲ有スルコトモアリ有シナイコトモアル。少クトモ $\omega \neq 0$ ナル D ヲ有スレバ必ず K ヲ有ス。

5. Vertex

Kern ヲ有セガレ $\mathcal{F}$ / ω 次ノ導來集合 $\mathcal{F}^{(\omega)}$ ハ空集合である。

証明。 若シ $\mathcal{F}^{(\omega)} \neq 0$ トスレバ $\mathcal{F}^{(\omega)}$ 内ニ少クトモ一ツ存在スル $\mathcal{F}^{(\omega)}$ / 孤立点 x ヲトリテ余小サイ ε = 關スル x / ε -ausgezeichnete Umgebung $U(x)$ ヲ作り $U(x) \cdot \{\mathcal{F}^{(\omega)} - x\} = 0$ トデキル。從ツテ $U(x)$ ハ nulldimensionaler Kompaktum である $U(x)^{(\omega)} = x$ 。

今 $O = \text{収斂スル } \varepsilon_\nu \text{ ヲ考ヘ } U(x) = \text{開スル } x \text{ ,}$
 ε_ν -ausgezeichnete Umgebung $\ni U_\nu(x)$, $U(x) - U_\nu(x)$
 $= \varphi_\nu$ トスレバ $\lim U_\nu(x) \rightarrow x$, 且ツ $\varphi_\nu^{(\omega_1)} = 0$. 從ツテ
 $\varphi_\nu^{(\alpha)} \neq 0$, $\varphi_\nu^{(\alpha+1)} = 0$ ナル如キ可附番順序数 α が $\varphi_\nu =$
 對シテ決マル, (かんときノ共通部分定理). (φ_ν 自体が空
 ナルトキハ $\alpha = -1$ ト考ヘル). φ_ν ノ斯ル α ラ α_ν トス
 ル. $\nu = \text{開スル } \alpha_\nu \text{ ノ上限ヲ } \alpha \text{ トスレバ } \alpha \text{ ハ可附番順序}$
 数デアル.

然ルニ $\lim \{ U(x) - \varphi_\nu \} \rightarrow x$ ナル故 $U(x)^{(\alpha+1)} = \text{高々 } x$.
 從ツテ $U(x)^{(\omega_1)} = 0$. コレハ不合理デアル.

—— (証明終) ——

從ツテ $\varphi^{(\alpha)} = 0$ ナル如キ最初ノ α ハ孤立可附番順
 序数デアル, (かんときノ共通部分定理). 從ツテ $\varphi^{(\alpha-1)}$ ハ
 空ナラサル有限集合デアル. 斯カル $\varphi^{(\alpha-1)}$, 各点ヲ φ ノ
 Vertex 頂点ト呼ビ $\alpha-1$ ヲソノ頂点ノ Ordnung 次数
 ト呼ブ.

定理1. 核ヲ有セサル $\varphi = \text{於テハソノ逐次導來集合ヲ}$
 作ツテ行クトキ可附番順序数 = 於イテ頂点カ現ハレル.

6. Kern ノ 次数

定理2. 核ヲ有スル $\varphi = \text{於イテハソノ逐次導來集合}$
 ヲ作ツテ行クトキ可附番順序数 = 於イテ核カ現ハレル. コ
 ノ可附番順序数ヲソノ Kern : Ordnung 次数ト呼
 ブ.

証明. φ ノ Kern ヲ K トシ $O = \text{収斂スル } \varepsilon_\nu \text{ ヲ考}$

へル。 $\mathcal{F}$ = 開スル K の ε_ν -ausgezeichnete Umgebung $\mathcal{U}_\nu(K)$, $\mathcal{F} - \mathcal{U}_\nu(K) = \mathcal{F}_\nu$ トスル。シカラバ $\mathcal{F}_\nu$ ハ核ヲ有セザルが故ニ ν ノ頂点ノ次数ハ可附番順序数デアアル。之レヲ α_ν トスル。スルト $\mathcal{F}^{(\alpha_\nu+1)} \subset \mathcal{U}_\nu(K)$ 。從ツテ今レ = 開スル α_ν ノ上限ヲ α トスレバ $\mathcal{F}^{(\alpha+1)} = K$ 。シカモ $\alpha+1$ ハ可附番順序数デアアル。

—— (証明終) ——

7. Cantor-集合

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu}{3^\nu}, \quad \xi_\nu = 0 \text{ oder } 2 \text{ ナル如キ数 } x \text{ ノ集合ヲ}$$

Cantorsche $\mathcal{F}_0$ -Menge ト云フ。⁽¹⁾ ココニハ簡單ニ Cantor-集合ト呼ブ。例ノ線分ヲ三等分シテハ中ノ開部分ヲ除キ去ル操作ヲ繰返シテ得ラレル集合デアアル。 nulldimensionaler Kompaktum ノ著名ナ一種デアアル。

定理3. 核 (換言スレバ perfekt + nulldimensionaler Kompaktum) ハ Cantor-集合ト位相同形デアアル。

証明ハ Annalen, 98, 99頁 — 101頁 = Alexandroff ト Uryshon ガマツテアリマスカラ略シマス。

(1) Math. Ann. 98 (1928), 99頁. van Dantzig, topologische Algebra, 中ニハ Cantorsche Menge トアル。

8. Abzählbarer Kompaktum

高々可附番集合が同時 = Kompaktum デアルモノヲ云フ。明ラカ = nulldimensionaler Kompaktum / 一種デアル。

補助定理 1. (Nulldimensionaler) Kompaktum の / 孤立点 / 個数ハ高々可附番個デアル。

証明. 任意 / 孤立点 x = 對シテ $\frac{1}{2}p(x, \mathcal{T}-x) = \delta_x$ トシ x / Umgebung $\delta_x(x)$ ヲ作ル。斯カル近傍 $\delta_x(x)$ が高々可附番個ナルコトヲ云ハバヨイ。今 $0 =$ 收斂スル ε_ν ヲ考ヘル。 $\mathcal{T}$ が kompakt + コトカラ ε_ν ヨリ大ナル δ_x / 個数ハ高々有限個デアル, 例ハバ n_ν 個。 $\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu$ ハ從ツテ高々可附番個。 — 以上 —

定理 4. 族ヲ有セザル $\mathcal{T}$ ハ abzählbarer Kompaktum デアル。

証明. $\mathcal{T}^{(p)}$ / 孤立点 / 個数ヲ n_p , $\mathcal{T}$ / 頂点 / 度数ヲ ω トスレバ $\mathcal{T}$ / 濃度ハ $\sum_{p=0}^{\omega} n_p$ デアル。シカル = 補助定理 = ヨリ $n_p \leq \aleph_0$, $\omega < \omega_1$ ナル故 $\mathcal{T}$ / 濃度ハ高々可附番デアル。

— 以上 —

定理 5. Abzählbarer Kompaktum ハ族ヲ有シナイ。

証明. Cantor-集合ハ濃度 $\aleph_1$ ナルコトヨリ明ラカデアル。

即チ族ヲ有セザルコト = abzählbar + コトトハ

äquivalent である。

(附言) Wohlordnungssatz を用ヒレバ或ル順序数
= 於イテ Kern 或ハ Vertex が表ハレ、以上ノ所論ハイクラ
カ 簡約サレマスが假定ヲ少クスルヌメニ殊更ニソレヲ候フコ
トヲ避ケマシタ。

II. Homomorphiesatz

任意ノ nulldimensionaler Kompaktum を任意
ノ nulldimensionaler Kompaktum 全体へ恒ニ
eindeutig stetig = 描寫ヲキルトハ限ラナイ。例ヘバ
有限集合ヲ無限集合全体へ寫スコトハデキナイ。コノ必
要十条件ヲ求メレノが本節である。

定理 1. Nulldimensionaler Kompaktum
へ恒ニソノ閉部分集合全体へ eindeutig stetig = 描寫
ヲキル。

証明. $\mathcal{F}$ ノ閉部分集合ヲ M トシ $\mathcal{F}$ が M 全体へ寫
レルコトヲ云フ。 $\mathcal{F} = U_0(M)$ トシ別ニ $0 = \text{收斂スル } \varepsilon_\nu$ ヲ
考ヘル。Nerv ノ次元ガ $0 + \nu$ 如キ $U_{\nu-1}(M)$ ノ ε_ν -
Überdeckung ヲ作り、ソノ Element ノ内 M ト
nicht fremd ナモノノ和ヲ $U_\nu(M)$ トシ残りヲ $\mathcal{F}_{\nu 1}, \dots,$
 $\mathcal{F}_{\nu i}, \dots, \mathcal{F}_{\nu s(\nu)}$ トスル。 M ノ点ニシテ $\mathcal{F}_{\nu i}$ = 最モ近
イ点ヲ $y_{\nu i}$ トシ $f(\mathcal{F}_{\nu i}) = y_{\nu i}$ トスル。 M 内ノ点 x = 對シ
テハ $f(x) = x$ トスル。コノ寫像ハ $\mathcal{F}$ ヲ M 全体へ寫ス一意寫
像である。

以下コレが連続ナルコトノ証明。

然レ、trivial ナ場合ヲ省略スレバ $x_\nu \rightarrow x, x_\nu \in M$,
 $x \in M$ ナルトキ $f(x_\nu) \rightarrow x$ ナルコトヲ証スレバヨイ。

今 $x_\nu \in \mathcal{T}_{\mu i}$ トスレバ $\mathcal{T}_{\mu i} \subset U_{\mu-1}(M) \subset S(M, \varepsilon_{\mu-1})$ 。
故 $= \rho(\mathcal{T}_{\mu i}, M) < \varepsilon_{\mu-1}$ 。故 $= \rho(\mathcal{T}_{\mu i}, f(x_\nu)) = \rho(\mathcal{T}_{\mu i}, f(\mathcal{T}_{\mu i}))$
 $< \varepsilon_{\mu-1}$ 。シカモ $\delta(\mathcal{T}_{\mu i}) < \varepsilon_\mu$ ナル故 $\rho(x_\nu, f(x_\nu)) < \varepsilon_{\mu-1}$
 $+ \varepsilon_\mu$ 。 $x_\nu \rightarrow x$ ナル故 $= \nu \rightarrow \infty$ ナラバ $\mu \rightarrow \infty$ 。

故 $= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(x_\nu, f(x_\nu)) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\varepsilon_{\mu-1} + \varepsilon_\mu) = 0$ 。從ツテ

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(x, f(x_\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(x, x_\nu) + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(x_\nu, f(x_\nu)) = 0$ 。

故 $= f$ ハ $\mathcal{T}$ ヲ M 全体ヘ寫ス一意連続寫像ナル。

(証明終)⁽²⁾

(2) 本定理ノ証明ヲミレバ次ノ様ニ言ツテモ差支ヘナイ。

(i) Nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{T}$ ハ、任意ノ閉部分集合 $M =$ 對シテ M ノ点ヲ動カサナイ一意連続寫像が存在シ
テ $\mathcal{T}$ ヲ M 全体ヘ寫スコトが出来ル。

然レコノ事實ハ nulldimensional ノ特性ナル。即チ

(ii) Kompaktum $\mathcal{T}$ ノ任意ノ閉部分集合 $M =$ 對シテ M ノ点ヲ動
カサナイ一意連続寫像が恒ニ存在シテ $\mathcal{T}$ ヲ M 全体ヘ寫ス
コトが出来ルトキハ $\mathcal{T}$ ハ nulldimensional ナル。

証明。 $\mathcal{T}$ ノ任意ノ二点ヲ x, y トスル。 $\mathcal{T}$ ハ (x, y) ヘモ移セル

者ナル。 x, y ノ Urbild ヲ夫々 $O(x), O(y)$ トスレバ $O(x), O(y)$

ハ夫ニ offen ナ $O(x) \ni x, O(y) \ni y, O(x) + O(y) = \mathcal{T}, O(x) \cdot O(y) = \emptyset$ 。

(次頁ヘ続ク)

Element $\gamma \in \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{S_{m+1}}$ トシ $2^{K_{m+1}-1} < S_{m+1} \leq 2^{K_{m+1}}$
 ナル如キ k_{m+1} ヲトリ $0 < 2$ ノミカラナル k_{m+1} 個ノ順列
 $(\xi_1^{m+1}, \dots, \xi_{k_{m+1}}^{m+1})$ γ S_{m+1} 個作り $\sigma_{\gamma_i} \gamma \in \mathcal{F}_{\xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{k_m}^m, \xi_1^{m+1}, \dots, \xi_{k_{m+1}}^{m+1}}$
 $\xi_{k_{m+1}}^{m+1}$ ト書き改ム。 (k_{m+1} ハ $\xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{k_2}^2, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{k_m}^m$
 ニ関シテ定マル, m ニ関シテ定マル, デハナイ)。

然ラバ m = 開スル Folge $\{\mathcal{F}_{\xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{k_m}^m}\}$ ハ
 Durchschnitt トシテ $\mathcal{F}$ ノ一点 x ヲ決定スル。逆 = $\mathcal{F}$ ノ
 点 y = 対シテハ唯一通りノ Folge $\{\mathcal{F}_{\eta_1^1, \dots, \eta_{k_1}^1, \dots, \eta_1^m, \dots, \eta_{k_m}^m}\}$
 が存在シ Durchschnitt トシテ y ヲ保有スル。 x, y ノ
 Metrik, 大小ハ suffix, Folge $\{\xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{k_2}^2, \dots\}$,
 $\{\eta_1^1, \dots, \eta_{k_1}^1, \eta_1^2, \dots, \eta_{k_2}^2, \dots\}$ ノ初メノ部分ノ類似度ノ多寡ト一
 致スル。今 $0. \xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{k_2}^2, \dots$ ヲ3進法ノ小数ト考ヘ
 $f(x) = 0. \xi_1^1, \dots, \xi_{k_1}^1, \xi_1^2, \dots, \xi_{k_2}^2, \dots = x^*$ トスレバ x^* ノ全体ハ
 Cantor-集合ノ部分集合 M ヲ形成スル。Cantor-集合ノ
 Metrik ハ明ラカニ = 小数部分ノ初メノ部分ノ類似度ノ多寡ト
 一致スルカテ f ハ topologische Abbildung デアル。即
 テ $\mathcal{F}$ ハ Cantor-集合ノ部分集合 M ト homöomorph デ
 アル。

—— 以上 ——

定理 4. Cantor-集合ハ任意ノ nulldimensionaler
 Kompaktum 全体ハ eindeutig stetig = 描寫可能
 デアル。

証明. Cantor-集合 C トシ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{F}$ トスル。定理3ニヨリ $\mathcal{F}$ ハ C ノ部分集合 M ト homeomorph デアル。 M ハ明ラカ $= C$ ニ於ケル閉集合デアル。従テ定理1ニヨリ C ハ M 全体ヘ eindeutig stetigニ寫セル。次ニ M $\mathcal{F}$ ヘ topologischニ戻セバヨイ。 — 以上 —

準同形定理 (i) Kernヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum ハ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum 全体ヘ eindeutig stetigニ描寫可能デアル。

証明. 定理2ニ依ツテ核ヲ有スル 0次元 Kompaktum ハ Cantor-集合 全体ヘ一意連続ニ寫ル。定理4ニ依テ Cantor-集合ハ任意ノ 0次元 Kompaktum 全体ヘ一意連続ニ寫ル。 — 以上 —

準同形定理 (ii) Kernヲ有セザル nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{F}_1$ ガ nulldimensionaler Kompaktum $\mathcal{F}_2$ 全体ヘ eindeutig stetigニ描寫カキルヌメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathcal{F}_2 \in \text{Kern}$ ヲ有セバ且ツ

(i) $\mathcal{F}_2$ ノ頂点ノ次数ガ $\mathcal{F}_1$ ノ頂点ノ次数ヨリ小ナルカ

(ii) 両者ノ頂点ノ次数相等シキトキハ $\mathcal{F}_2$ ノ頂点ノ個数ガ $\mathcal{F}_1$ ノ頂点ノ個数ヨリ大ナラサルコトデアル。

証明. 必要ナルコトハ核ヲ有スル $\mathcal{F}$ ハ中集合デ核ヲ有セザル $\mathcal{F}$ ハ可附番集合ナルコトノ前掲拙文 (大塚敬博,

5巻1号, 30頁)中ノ定理12ノ必要條件カラ明ラオデ十
分ナルコトモ同ジク同定理ノ十分條件カラ明ラカデア
ル。 —以上—

(註) $\mathcal{T}$ = topologische Dichtigkeit $D(\mathcal{T})$ トデモ言
フ様トモノヲ考ヘテソノ大小ヲ次ノ様ニ決メル:

(i) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 共ニ核ヲ有スルトキハ $D(\mathcal{T}_1) = D(\mathcal{T}_2)$

(ii) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ハ逐次導来集合ヲ作ツテユクトキ何レカ一方
ノ頂点ガ表ハレタトコロノ濃度ノ大小ヲ決メル。

スルト上ノ単同形定理 (i), (ii) ハ次ノ様ニモ書ケル:

$\mathcal{T}_1$ ガ $\mathcal{T}_2$ 全体ニ *eindeutig stetig* = 描寫ヲキルタメノ
必要十分條件ハ $D(\mathcal{T}_1) \cong D(\mathcal{T}_2)$ ナルコトデアアル。

(昭和十二年一月三十一日書終ル)